Подготовка обучающихся к ЕГЭ по математике

Панина Нина Александровна,
учитель математики МБОУ
«Средняя школа № 33, г. Смоленск»

Подготовка обучающихся к ЕГЭ по математике включает в себя

- Организацию повторения теоретических сведений по каждой теме (в работу включаются все обучающиеся класса) (возможно, с параллельным освоением нового содержания)
- Дифференцированный контроль компетентности обучающихся по теоретическим вопросам темы (Обучающиеся, выбравшие базовую математику, демонстрируют 1) понимание справочной информации и 2) умение правильно выбрать формулы для решения задач. Обучающиеся, выбравшие профильную математику, 1) демонстрируют знание правил, алгоритмов, теорем, формул, 2) умение выбрать необходимые теоретические сведения и расположить их в логической последовательности для решения задач)
- Организацию дифференцированного практикума по каждой теме
- Организацию зачёта **по каждой теме задания** с кратким ответом, организацию индивидуальной коррекции (при необходимости)
- Пропедевтику ошибок оформления решений с развёрнутым ответом

Пропедевтика ошибок оформления решений. Логарифмические неравенства

Преобразование

$$\log_2(x-5) \le \log_2 1;$$

$$x-5 \le 1$$

является ошибочным. Его выполнение в задании 15 влечёт за собой оценку 0 первичных баллов. Причина очевидна: неравенства неравносильны, преобразование изменило множество решений.

Бессловесное решение по плану: 1) нахождение ОДЗ, 2) выполнение преобразований без учёта ОДЗ и нахождение множества решений полученного неравенства, 3) коррекция полученного множества с учётом ОДЗ – в подобном случае **не является верным**.

Результат: 0 первичных баллов.

Причина: на втором шаге получено множество решений, не учитывающее допустимость значений переменной для исходного неравенства. **Теоремы, позволяющей научно обосновать связь множеств решений неравносильных неравенств, не существует**.

По страницам школьного учебника

- Мерзляк А. Г. и другие

Теорема 7.1

При $a > 1$ неравенство $\log_a x_1 > \log_a x_2$ выполняется тогда и только тогда, когда $x_1 > x_2 > 0$; при $0 < a < 1$ неравенство $\log_a x_1 > \log_a x_2$ выполняется тогда и только тогда, когда $0 < x_1 < x_2$.

- Алимов Ш. А., Колягин Ю. М.

Решить неравенство

$$\log_2 (x-3) + \log_2 (x-2) \leqslant 1. \qquad (3)$$

Таким образом, исходное неравенство (3) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} (x-3)(x-2) \leqslant 2, \\ x > 3. \end{cases}$$

По страницам школьного учебника

- Мордкович А. Г.

На практике эти теоремы применяют так: переходят от неравенства $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ при $a > 1$ к равносильной ему системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases}$$

а при $0 < a < 1$ — к равносильной системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

По страницам школьного учебника

- Никольский С. М. и другие

ПРИМЕР 1. Решим неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}} x > -2. \qquad (5)$$

Так как $-2 = \log_{\frac{1}{3}} 9$, то неравенство (5) можно переписать в виде

$$\log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} 9. \qquad (6)$$

Так как $\frac{1}{3} < 1$, то функция $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ убывающая. Поэтому множество всех решений неравенства (6), а значит и неравенства (5), есть интервал $0 < x < 9$ (рис. 66).

Ответ. (0; 9).

ФРАГМЕНТ ПРИМЕРА 3

$$\log_3 x < \log_3 \frac{1}{9}. \qquad (10)$$

Так как $3 > 1$, то функция $y = \log_3 x$ возрастающая. Поэтому множество всех решений неравенства (10), а значит и неравенства (9), есть интервал $0 < x < \frac{1}{9}$ (рис. 68).

Ответ. $\left(0; \frac{1}{9}\right)$.

Пример развёрнутого ответа участника ЕГЭ-2023
с комментариями эксперта

15. $\log_4((x-5)(x^2-2x-15))+1 \geqslant 0{,}5\log_2(x-5)^2$

ОДЗ. $\begin{cases}(x-5)^2>0\\(x-5)(x^2-2x-15)>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\neq 5\\x\in(-3;5)\cup(5;+\infty)\end{cases} \Rightarrow x\in(-3;5)\cup(5;+\infty)$

$(x^2-2x-15)(x-5)>0$

$(x-5)(x+3)(x-5)>0$

$(x-5)^2(x+3)>0$

$x^2-2x-15=0$

$D=4+60=64$

$x_{1,2}=\frac{2\pm8}{2}=\left[\begin{array}{l}5\\-3\end{array}\right.$

$-\quad(-3)\quad+\quad(5)\quad+\quad x \Rightarrow x\in(-3;5)\cup(5;+\infty)$

$\log_4((x-5)(x-5)(x+3))+\log_4 4 \geqslant \frac{1}{2}\log_2(x-5)^2$

$\log_4(4(x-5)^2(x+3)) \geqslant \log_4(x-5)^2$

т.к. $4>1$, знак неравенства сохранится.

$4(x-5)^2(x+3) \geqslant (x-5)^2$

$(x-5)^2(4(x+3)-1)\geqslant 0$

$(x-5)^2=0$ $\quad$ $4(x+3)-1=0$

$x=5$ $\quad$ $x+3=0{,}25$

$x=-2{,}75$

$-\quad(-3)\quad(-2{,}75)\quad+\quad(5)\quad+\quad x$

Ответ. $x\in[-2{,}75;5)\cup(5;+\infty)$

Условные обозначения:

______ - несущественная ошибка, не влияющая на результат

______ - существенная ошибка, снижающая оценку

Оценка ответа участника ЕГЭ-2023

15. $\log_4((x-5)(x^2-2x-15))+1 \geqslant 0{,}5\log_2(x-5)^2$

ОДЗ. $\begin{cases}(x-5)^2>0\\(x-5)(x^2-2x-15)>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\neq 5\\x\in(-3;5)\cup(5;+\infty)\end{cases} \Rightarrow x\in(-3;5)\cup(5;+\infty)$

$(x^2-2x-15)(x-5)>0$

$(x-5)(x+3)(x-5)>0$

$(x-5)^2(x+3)>0$

$x^2-2x-15=0$

$D=4+60=64$

$x_{1,2}=\frac{2\pm 8}{2}=\left[\begin{array}{l}5\\-3,\end{array}\right.$

$\Rightarrow x\in(-3;5)\cup(5;+\infty)$

!

$\log_4((x-5)(x-5)(x+3))+\log_4 4 \geqslant \frac{1}{2}\log_2(x-5)^2$

$\log_4(4(x-5)^2(x+3)) \geqslant \log_4(x-5)^2$

т.к. $4>1$, знак неравенства сохранится.

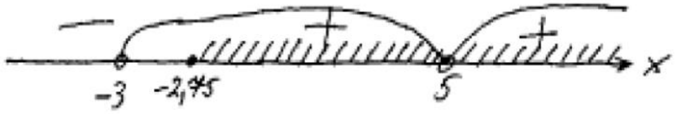
$4(x-5)^2(x+3) \geqslant (x-5)^2$

$(x-5)^2(4(x+3)-1)\geqslant 0$

$(x-5)^2=0$ $\quad$ $4(x+3)-1=0$

$x=5$ $\quad$ $x+3=0{,}25$

$x=-2{,}75$



Ответ. $x\in[-2{,}75;5)\cup(5;+\infty)$

0 баллов

Правильное оформление решений логарифмических неравенств

1.

Неравенство $\log_2 x^2 \ge 0$ действительно можно решать так:

$$\log_2 x^2 \ge 0;$$
$$\log_2 x^2 \ge \log_2 1;$$
$$x^2 \ge 1;$$
$$\left[\begin{array}{l} x \le -1 \\ x \ge 1. \end{array}\right.$$

Но неравенство $\log_2(x-5) \le 0$ следует решать иначе:

I способ:

$$\log_2(x-5) \le 0;$$
$$\log_2(x-5) \le \log_2 1;$$
$$0 < x-5 \le 1;$$
$$5 < x \le 6$$

II способ:

$$\log_2(x-5) \le 0;$$
$$\log_2(x-5) \le \log_2 1;$$
$$\begin{cases} x-5 > 0, \\ x-5 \le 1; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x > 5, \\ x \le 6 \end{cases}$$
$$5 < x \le 6$$

Правильное оформление решений логарифмических неравенств

2.

Рассмотрим решение неравенства

$$\log_2(x-3)+\log_2(x-2)\le 1.$$

$$\begin{cases} x-3>0, \\ x-2>0, \\ \log_2\big((x-3)(x-2)\big)\le \log_2 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x>3, \\ x>2, \\ (x-3)(x-2)\le 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>3, \\ x^2-2x-3x+6-2\le 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x>3, \\ x^2-5x+4\le 0. \end{cases}$$

$$x^2-5x+4=0$$

$$D=25-16=9;$$

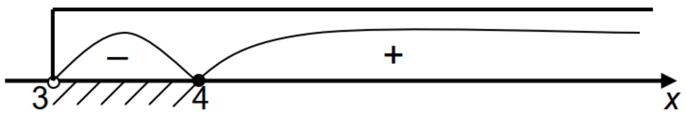
$$x_{1,2}=\frac{5\pm 3}{2};$$

$$x_1=1; \quad x_2=4.$$

Следовательно, $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$.

Имеем $\begin{cases} x>3, \\ (x-1)(x-4)\le 0. \end{cases}$

Рассмотрим функцию $f(x)=(x-1)(x-4)$ при $x>3$.



$$x\in(3;4]$$

Ответ: $(3;4]$.

Правильное оформление решений логарифмических неравенств

Допускается решение по алгоритму

- ✓Шаг 1. Составить систему ограничений и решить её. Получим область допустимых значений переменной
- ✓Шаг 2. **Сообщить, что вся дальнейшая работа выполняется исключительно в области допустимых значений переменной** и упростить исходное неравенство
- ✓Шаг 3. **Решить** исходное неравенство, **не выходя за рамки ОДЗ**.

PS Ни одной точки, ни одного знака + или –, штриховки не должно быть за пределами ОДЗ

- ✓Шаг 4. Записать ответ

Рассмотрим этот способ

оформления решения на примере

Решите неравенство

$$\log_2(x-3)+\log_2(x-2)\le 1$$

Правильное оформление решений логарифмических неравенств

Допускается

$$\log_2(x-3)+\log_2(x-2)\le 1$$

Ограничения: $\begin{cases} x-3>0, \\ x-2>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>3, \\ x>2; \end{cases}$ $x>3$

Если $x>3$, то

$\log_2((x-3)(x-2))\le \log_2 2;$

$(x-3)(x-2)\le 2;$

$x^2-2x-3x+6-2\le 0;$

$x^2-5x+4\le 0.$

$x^2-5x+4=0$

$D=25-16=9;$

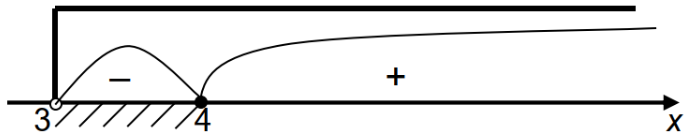
$x_{1,2}=\dfrac{5\pm 3}{2};$

$x_1=1;\quad x_2=4.$

Следовательно, $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$.

Имеем $(x-1)(x-4)\le 0$ при $x>3$.

Рассмотрим функцию $f(x)=(x-1)(x-4)$ при $x>3$.



$x\in(3;4]$

Ответ: $(3;4]$.

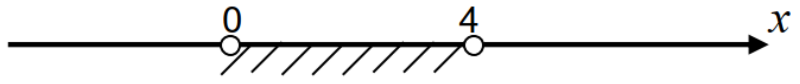
Пропедевтика ошибок оформления решений.
Дробно-рациональные неравенства

Дважды (ЕГЭ-2021 и ЕГЭ-2023) решение исходного неравенства сводилось к простейшему дробно-рациональному неравенству с одинаковым числовым числителем. Правильно его решали менее половины участников, приступавших к решению. Типичная ошибка: перенос умения решать уравнение-пропорцию на данную ситуацию (в данном случае перенос умений недопустим)

Пример правильного решения:

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{4} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4-x}{4x} > 0.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{4-x}{4x}$.



$$0 < x < 4$$

Ответ: (0; 4)

PS Знак равносильности можно заменить точкой с запятой

15. Решите неравенство $x^3+9x^2+6-\frac{6x^3+4,5x^2}{x-3}\le\frac{(3x+1)^2-19}{x-3}$

Источник: https://alexlarin.net/ege/2024/trvar459.html

$$x^3+9x^2+6-\frac{6x^3+4,5x^2}{x-3}\le\frac{(3x+1)^2-19}{x-3};$$

$$x^3+9x^2+6-\frac{6x^3+4,5x^2}{x-3}-\frac{(3x+1)^2-19}{x-3}\le0;$$

$$\frac{x^3(x-3)+9x^2(x-3)+6(x-3)-(6x^3+4,5x^2)-(3x+1)^2+19}{x-3}\le0;$$

$$\frac{x^4-3x^3+9x^3-27x^2+6x-18-6x^3-4,5x^2-9x^2-6x-1+19}{x-3}\le0;$$

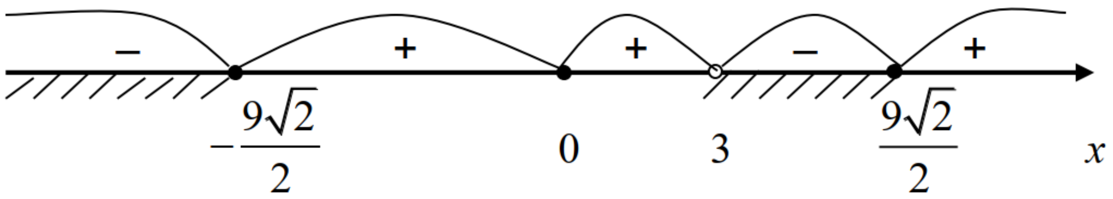
$$\frac{x^4-40,5x^2}{x-3}\le0;$$

$$\frac{x^4-40,5x^2}{x-3}\le 0;$$

$$\frac{x^2\left(x^2-\frac{81}{2}\right)}{x-3}\le 0;$$

$$\frac{x^2\left(x-\frac{9\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{9\sqrt{2}}{2}\right)}{x-3}\le 0.$$

Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{x^2\left(x-\frac{9\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{9\sqrt{2}}{2}\right)}{x-3}$.



$$x\in\left(-\infty;-\frac{9\sqrt{2}}{2}\right]\cup\{0\}\cup\left(3;\frac{9\sqrt{2}}{2}\right]$$

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{9\sqrt{2}}{2}\right]\cup\{0\}\cup\left(3;\frac{9\sqrt{2}}{2}\right]$

Задание 13

а) Решите уравнение $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1$

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1;$$

$$2\left(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2x-\sqrt{3}\cos x=1;$$

$$2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x\right)+\cos 2x-\sqrt{3}\cos x=1;$$

$$\sin x+\cancel{\sqrt{3}\cdot\cos x}+\cos 2x-\cancel{\sqrt{3}\cos x}=1;$$

$$\sin x+\cos^2 x-\sin^2 x=\cos^2 x+\sin^2 x;$$

$$\sin x-2\sin^2 x=0;$$

$$\sin x - 2\sin^2 x = 0;$$

$$\sin x(1 - 2\sin x) = 0;$$

$\sin x = 0$ или $1 - 2\sin x = 0;$

$x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

$$\sin x = \frac{1}{2};$$

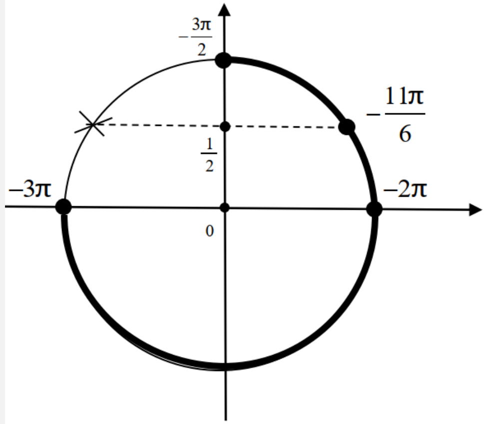
$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Комментарий: Решение задачи *а*) обоснованное, верное. Более подробно объяснить решение можно, но в этом нет необходимости.

Задание 13 б)

Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

Верное, обоснованное решение:

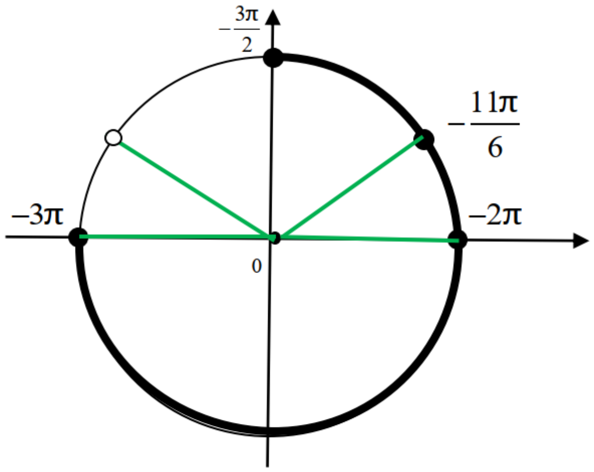


$x_1 = -3\pi$

$x_2 = -3\pi + \pi = -2\pi$

$x_3 = -2\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6}$

или



$x_1 = -3\pi$

$x_2 = -3\pi + \pi = -2\pi$

$x_3 = -2\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6}$

Решение признаётся обоснованным, если

- на чертеже ярко выделена **дуга**, соответствующая отрезку, указанному в условии (выделение дуги штриховкой, например, как в учебнике А. Г. Мордковича, даже лучше),
- чётко указаны **концы дуги** (открытые или закрытые) и графически, и аналитически (**точки выделены на чертеже и подписаны**),

- отбор корней по тригонометрической окружности выполнен по уравнениям, на которые распадается исходное уравнение (в данном случае, это уравнения $\sin x = 0$, $\sin x = \frac{1}{2}$), **на осях отмечены точки** (в разбираемом примере, это 0 и $\frac{1}{2}$), выполнены необходимые **построения** для получения точек на окружности (в данном случае, это перпендикуляры к оси синусов),

или

- отбор корней по тригонометрической окружности выполнен по множеству корней исходного уравнения (в данном случае, это $x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$), выполнены необходимые **построения** для получения точек на окружности (в данном случае, это радиусы),

- проведен **анализ принадлежности** полученных на окружности точек выделенной дуге,

- **точки**, принадлежащие дуге, **выделены** (закрашенный кружочек); точки, не принадлежащие, – **удалены** (символами удаления являются выкалывание (как в школьном учебнике, пустой кружочек) и символ, напоминающий небольшой крест (это две встречные стрелки, которые сходятся в одной точке и каждая из которых удаляет конец движения по окружности), использовать можно любой из указанных символов,

- рядом с окружностью составлены **формулы расчёта** отбираемых корней, вычислены корни, принадлежащие указанному в условии промежутку (в обоих случаях формулы расчёта отбираемых корней одинаковые, поэтому представляю только один случай),
- **корни подписаны на окружности** (на окружности можно подписывать не -3π, а x_1, не -2π, а x_2, не $-\frac{11\pi}{6}$, а x_3, при этом рядом с окружностью есть расшифровка этих значений).

PS Крест – это символ удаления, а не выделения. К сожалению, некоторые участники ЕГЭ именно так, выделяют корни, принадлежащие промежутку. Неправильное использование символики.

Методы выполнения задания 13 б)

Другой способ решения задачи б) – **метод перебора**. Часто встречается в экзаменационных работах, но в большинстве случаев решение неправильное.

Решение любой задачи (и на ЕГЭ в том числе) **заключается в отыскании всех верных ответов и доказательстве, что других ответов нет.**

Отбирая корни методом перебора, работаем с формулами решений уравнения. В разобранном примере, это $x=\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$, $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi m,\quad m\in\mathbb{Z}$. Три линейных возрастающих функции, заданных на множестве целых чисел. Поэтому **правильное решение должно строиться «по методу артиллериста»:**

при последовательном увеличении значения параметра на 1 нужно обеспечить

- **недолёт до промежутка,**
- **попадание на промежуток,**
- **перелёт.**

И даже, если попадание совпало с правым концом промежутка, то перелёт, всё равно, является обязательным!!!!!!!!!!!!!!!!

б) $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Отберём корни уравнения методом перебора.

1) $x=\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}$.

Если $n=-4$, то $x=-4\pi, \quad -4\pi\notin\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right], \quad -4\pi<-3\pi$,

если $n=-3$, то $x=-3\pi, \quad -3\pi\in\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$,

если $n=-2$, то $x=-2\pi, \quad -2\pi\in\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$,

если $n=-1$, то $x=-\pi, \quad -\pi\notin\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right], \quad -\pi>-\frac{3\pi}{2}$.

2) $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}$.

Если $k=-2$, то

$$x=\frac{\pi}{6}-4\pi=-\frac{23\pi}{6}, \quad -\frac{23\pi}{6}\notin\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right], \quad -\frac{23\pi}{6}<-3\pi,$$

если $k=-1$, то $x=\frac{\pi}{6}-2\pi=-\frac{11\pi}{6}, \quad -\frac{11\pi}{6}\in\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$,

если $k=0$, то $x=\frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{6}\notin\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right], \quad \frac{\pi}{6}>-\frac{3\pi}{2}$.

3) $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi m, \quad m\in\mathbb{Z}$.

Если $m=-2$, то

$$x=\frac{5\pi}{6}-4\pi=-\frac{19\pi}{6}, \quad -\frac{19\pi}{6}\notin\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right], \quad -\frac{19\pi}{6}<-3\pi,$$

если $m=-1$, то

$$x=\frac{5\pi}{6}-2\pi=-\frac{7\pi}{6}, \quad -\frac{7\pi}{6}\notin\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right], \quad -\frac{7\pi}{6}>-\frac{3\pi}{2}.$$

Ответ: а) $\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}, \qquad \frac{\pi}{6}+2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}, \qquad \frac{5\pi}{6}+2\pi m, \quad m\in\mathbb{Z}$;

б) $-3\pi, \quad -2\pi, \quad -\frac{11\pi}{6}$

Выполнение задания 13 б) с помощью неравенств

Отбор с помощью неравенств выполняется по формулам решений.

Пример. Отобрать корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$, если

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Решение.

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$-3\pi \le \frac{\pi}{6} + 2\pi n \le -\frac{3\pi}{2};$$

$$-18\pi \le \pi + 12\pi n \le -9\pi;$$

$$-19\pi \le 12\pi n \le -10\pi;$$

$$-\frac{19}{12} \le n \le -\frac{10}{12};$$

$$-1\frac{7}{12} \le n \le -\frac{5}{6}.$$

Так как $n \in \mathbb{Z}$, то $n = -1$.

Тогда $x = \frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11\pi}{6}$.

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$-3\pi \le \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \le -\frac{3\pi}{2};$$

$$-18\pi \le 5\pi + 12\pi n \le -9\pi;$$

$$-23\pi \le 12\pi n \le -14\pi;$$

$$-\frac{23}{12} \le n \le -\frac{14}{12};$$

$$-1\frac{11}{12} \le n \le -1\frac{1}{6}.$$

Так как $n \in \mathbb{Z}$, то нет решений.

Ответ: б) $-\frac{11\pi}{6}$.

Задание 16. Вклады

В банке можно открыть вклад «Популярный» под 20% годовых и «Интересный» под 10% годовых в первый год и под n% годовых во последующие годы (n – целое число). При каком наименьшем значении n вклад «Интересный» окажется через 3 года более выгодным, если снимать деньги или пополнять счёт клиент не будет?

Решение

Пусть A рублей – первоначальный размер вклада «Популярный», первоначальный размер вклада «Интересный». Тогда в соответствии с условием задачи имеем:

Вклад «Популярный»

Год	Сумма в начале года, рублей	Сумма в конце года, рублей
1-й год	A	$1,2A$
2-й год	$1,2A$	$1,2\cdot 1,2A=1,44A$
3-й год	$1,44A$	$1,2\cdot 1,44A=1,728A$

Вклад «Интересный»

Год	Сумма в начале года, рублей	Сумма в конце года, рублей
1-й год	A	$1,1A$
2-й год	$1,1A$	$(100+n)\%$ от $1,1A=\dfrac{(100+n)1,1A}{100}$
3-й год	$\dfrac{(100+n)1,1A}{100}$	$(100+n)\%$ от $\dfrac{(100+n)1,1A}{100}=\dfrac{(100+n)^2 1,1A}{10\,000}$

По условию задачи через 3 года вклад «Интересный» окажется более выгодным.

$$\frac{(100+n)^2 1,1A}{10\,000}>1,728A.$$

По смыслу задачи $A>0$, тогда $\dfrac{(100+n)^2 1,1}{10\,000}>1,728;$

$$\frac{(100+n)^2\,1{,}1}{10\,000} > 1{,}728;$$

$$(100+n)^2\,1{,}1 > 17\,280;$$

$$(100+n)^2 \cdot 11 > 172\,800;$$

$$(100+n)^2 > \frac{172\,800}{11};$$

$$(100+n)^2 > 15\,709\frac{1}{11}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Так как } 100+n>0\text{, то } 100+n > \sqrt{15\,709\frac{1}{11}};\\ \qquad 125<\sqrt{15\,709\frac{1}{11}}<126\end{array}\right| \Rightarrow \quad (100+n)_{\text{наим., целое}} = 126;$$

$$n_{\text{наим., целое}} = 126-100 = 26.$$

26% – наименьшая годовая ставка в банке "Интересный" во второй и последующие годы.

Ответ: $n_{\text{наим.}} = 26$.

Задание 16. Кредит

В июле 2025 года планируется взять кредит на 10 лет в размере 1300 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 2580 тыс. рублей. Сколько рублей составит долг в июле 2030 года?

Источник: ЕГЭ 2023, профильный экзамен, основная волна, открытый вариант

Анализ условия (выполняется устно).

1) Каждый январь долг увеличивается, причём каждый год увеличение разное (рассчитываются 20% от остатка долга).

2) Это увеличение не должно влиять на остаток долга после выплаты в июле (в июле каждого года в 2026-2030 годах долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года).

Следовательно, каждый год с 2026 по 2030 *нужно выплачивать сумму увеличения долга и фиксированную сумму*, на которую уменьшается долг к июлю каждого года.

Важно знать - **на сколько увеличился долг в январе,**

- **на сколько уменьшился в июле**,
- **чему равен остаток долга.**

Аналогично в 2031-2035 годах, но фиксированная сумма должна стать другой.

Решение. Пусть 1300 тыс. рублей = S тыс. рублей.
Пусть 20% = 0,2 = k.
Пусть к июлю 2026 – 2030 годов долг уменьшается на a тыс. рублей по сравнению с долгом на июль предыдущего года.
Пусть к июлю 2031 – 2035 годов долг уменьшается на b тыс. рублей по сравнению с долгом на июль предыдущего года.
Тогда в соответствии с условием задачи имеем:

Год	В январе банк увеличит долг на … тыс. рублей	Клиент выплатит … тыс. рублей	Долг в конце года, тыс. рублей
2025	-	-	S
2026	kS	$kS+a$	$S-a$
2027	$k(S-a)=kS-ka$	$kS-ka+a$	$S-2a$
2028	$k(S-2a)=kS-2ka$	$kS-2ka+a$	$S-3a$
2029	$k(S-3a)=kS-3ka$	$kS-3ka+a$	$S-4a$
2030	$k(S-4a)=kS-4ka$	$kS-4ka+a$	$S-5a$
2031	$k(S-5a)=kS-5ka$	$kS-5ka+b$	$S-5a-b$
2032	$k(S-5a-b)=kS-5ka-kb$	$kS-5ka-kb+b$	$S-5a-2b$
2033	$k(S-5a-2b)=kS-5ka-2kb$	$kS-5ka-2kb+b$	$S-5a-3b$
2034	$k(S-5a-3b)=kS-5ka-3kb$	$kS-5ka-3kb+b$	$S-5a-4b$
2035	$k(S-5a-4b)=kS-5ka-4kb$	$kS-5ka-4kb+b$	$S-5a-5b$

По условию задачи к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью. Тогда в 2035 году остаток долга равен 0. $S-5a-5b=0$;

$1300-5a-5b=0$, так как $S=1300$;

$a+b=260$;

$b=260-a$.

Сумма всех платежей после полного погашения кредита составит (тыс. рублей):

$10kS-35ka-10kb+5a+5b$, что равно 2580 тыс. рублей.

Учтём, что $S=1300$, $k=0{,}2$, $5a+5b=1300$, $b=260-a$, тогда получим:

$$10\cdot 0{,}2\cdot 1300-35\cdot 0{,}2a-10\cdot 0{,}2(260-a)+1300=2580;$$

$$10\cdot 0,2\cdot 1300-35\cdot 0,2a-10\cdot 0,2\left(260-a\right)+1300=2580;$$

$$2600-7a-520+2a+1300=2580;$$

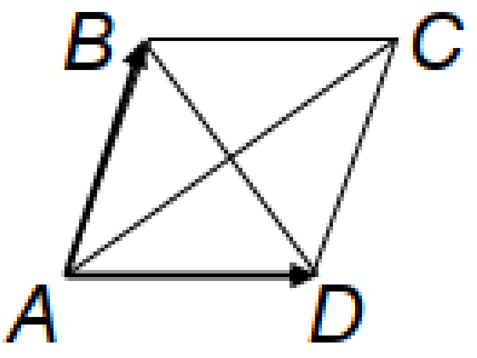
$$5a=800.$$

Следовательно, в июле 2030 года долг составит S – 5a = 1300 – 800 = 500 (тыс. рублей) = 500 000 рублей.

Ответ: 500 000 рублей – долг в июле 2030 года.

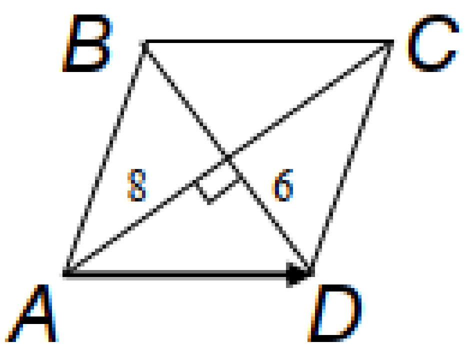
Задание 2

1. Диагонали изображённого на рисунке ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.



Ответ: 16

2. Диагонали изображённого на рисунке ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AD}$.

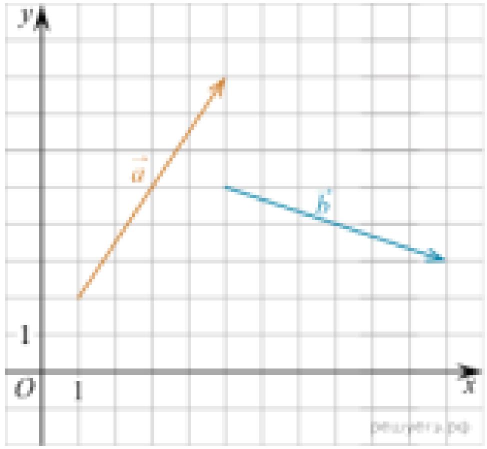


Решение. $|\overrightarrow{AD}| = AD = 10$

Ответ: 10

Задание 2

Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображённых на координатной плоскости.



Решение

(1; 2), (5; 8). Тогда $\vec{a}\{4; 6\}$

(5; 5), (11; 3). Тогда $\vec{b}\{6; -2\}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\cdot6+6\cdot(-2)=24-12=12$$

Ответ:12

Задание 2

Найдите значение n, при котором векторы $\vec{a}\{n; 6\}$ и $\vec{b}\{10; 15\}$ коллинеарны.

Источник: https://alexlarin.net/ege/2024/trvar459.html

Решение: если векторы коллинеарны, то их координаты пропорциональны. Тогда

$$\frac{n}{10} = \frac{6}{15};$$

$$15n = 60;$$

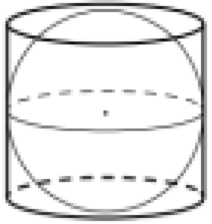
$$n = 4.$$

Ответ: 4 (в формате краткого ответа ЕГЭ)

Задание 3

Шар, объём которого равен 24, вписан в цилиндр.

Найдите объём цилиндра.



Решение. 2 пространственных тела => **Устанавливаем закономерности и решаем методом сопоставления**

Закономерности: 1) радиус основания цилиндра равен радиусу шара и равен R,
2) высота цилиндра равна $2R$.

Шар	Цилиндр
$V_{шара} = \frac{4}{3}\pi R^3 = 24,$ $4\pi R^3 = 24 \cdot 3,$ $\pi R^3 = \frac{24 \cdot 3}{4} = 6 \cdot 3 = 18,$ $\pi R^3 = 18$	$V_{цилиндра} = S_{осн.} \cdot h =$ $= \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3 =$ $= 2 \cdot 18 = 36.$

Ответ: 36

Задание 4

Игральную кость бросают дважды. Известно, что сумма выпавших очков больше 7. Найдите вероятность события «ни при одном из бросков не выпало меньше 4 очков»

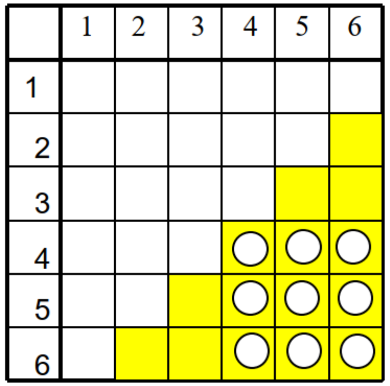
Источник: https://alexlarin.net/ege/2024/trvar459.html

1) Анализ ситуации. «Игральную кость бросают дважды» (по условию). Следовательно, самый надёжный способ решения – таблица с двумя входами. Строки отражают очки, выпавшие при первом броске, столбцы – при втором.

   Выделяем те клетки таблицы, которые соответствуют событию «сумма выпавших очков больше 7». Их количество указывает на общее число исходов.

   Среди выделенных клеток выбираем те, которые соответствуют событию «ни при одном из бросков не выпадало меньше 4 очков». Их количество указывает на число благоприятных исходов.

2) Оформляем решение задачи



$n = 15$

$m = 9$

$$p = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0,6$$

Ответ: 0,6

Задание 10

Особенности решения уравнений при решении текстовой задачи:

1. **МОЖНО** смысл задачи присоединить к уравнению. Решая уравнение с ограничениями, сократим затраты времени.

PS ***На ОГЭ в первую очередь нужно показать умение без ошибок применять алгебраические формулы, алгоритмы.*** До 9 класса включительно работаем строгим методом математического моделирования, ***переход в решении к уравнению с логическими ограничениями возможен только в 10-11 классах***.

2. Дискриминант находим **НЕ** методом вычисления, а методом **РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОЖИТЕЛИ**

Задание 10. Задача на работу

Два ретрансляционных спутника за 1 час могут обработать 40 млрд. сигналов. Известно, что первый спутник может обработать 125 млрд. сигналов на 3 часа быстрее, чем второй – 120 млрд. сигналов. За сколько часов первый спутник может обработать 500 млрд. сигналов?

Источник: https://alexlarin.net/ege/2024/trvar459.html

Решение

	Производительность труда, млрд. сигналов в час	Время работы, часов	Объём выполненной работы, млрд. сигналов
Первый спутник	x	$\frac{125}{x}$	125
Второй спутник	$40-x$	$\frac{120}{40-x}$	120

$$\frac{120}{40-x}-\frac{125}{x}=3.$$

$$\frac{120}{40-x}-\frac{125}{x}=3.$$

По смыслу задачи $x>0$, $40-x>0$. Тогда

$$120x-125(40-x)=3x(40-x);$$

$$120x-125\cdot 40+125x=120x-3x^2;$$

$$3x^2+125x-125\cdot 40=0.$$

$$D=125\cdot 125+4\cdot 3\cdot 125\cdot 40=125\cdot 5\cdot(25+96)=625\cdot 121=25^2\cdot 11^2=275^2$$

$$x_{1,2}=\frac{-125\pm 275}{6};$$

$x_1\ \dfrac{-400}{6}<0$, не подходит; $\quad x_2=\dfrac{150}{6}=25.$

25 млрд. сигналов в час обрабатывает первый спутник.

$\dfrac{500}{25}=20$ часов требуется первому спутнику для обработки 500 млрд. сигналов.

Ответ: 20 (в формате ЕГЭ)

Благодарю за внимание!

Панина Н. А.
+79051620770