ЗАДАНИЕ 9
В ПРОФИЛЬНОМ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

(Графики функций)

Шпунтова О.Н.,
учитель математики, методист
МБОУ «СШ № 26 им. А.С. Пушкина»
г. Смоленска, региональный методист

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор
ФГБНУ «Федеральный институт
педагогических измерений»
О.А. Решетникова
«__» ______ 2021 г.

«СОГЛАСОВАНО»
Председатель
Научно-методического совета
ФГБНУ «ФИПИ» по математике
__________ Д.В. Лиханов
«17» сентября 2021 г.

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Деме...
контрольн...
единого госу...

подготовлен фе...

«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ И...

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

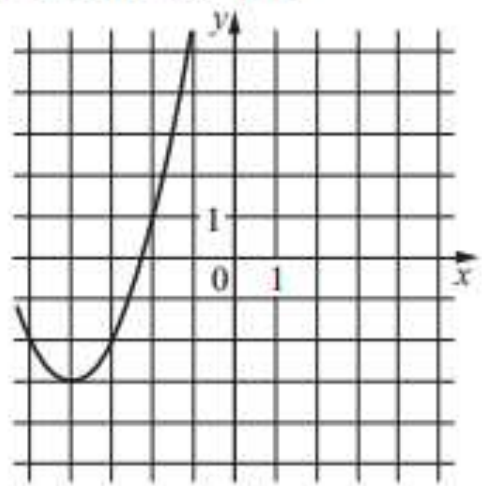
Пояснения к демонстрационному варианту контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2022 года по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

При ознакомлении с демонстрационным вариантом контрольных измерительных материалов (КИМ) единого государственного экзамена (ЕГЭ) 2022 г. следует иметь в виду, что задания, включённые в него, не отражают всех элементов содержания, которые будут проверяться с помощью вариантов КИМ в 2022 г. Полный перечень элементов содержания, которые могут контролироваться на едином государственном экзамене 2022 г., приведён в кодификаторе элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников образовательных организаций для проведения единого государственного экзамена 2022 г. по математике.

В демонстрационном варианте представлены конкретные примеры заданий, не исчерпывающие всего многообразия возможных

9 На рисунке изображён график функции вида $f(x)=ax^2+bx+c$, где числа a, b и c — целые. Найдите значение $f(-12)$.



Ответ: ______________________.

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор
ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений»

О.А. Решетникова
«____» ____________ 2021 г.

«СОГЛАСОВАНО»
Председатель
Научно-методического совета
ФГБНУ «ФИПИ» по математике

____________ Д.В. Липанов
«27» октября 2021 г.

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Спецификация
контрольных измерительных материалов
для проведения в 2022 году

Обобщённый план варианта КИМ ЕГЭ 2022 года
по МАТЕМАТИКЕ (профильный уровень)

Используются следующие условные обозначения.
Уровни сложности заданий: Б – базовый; П – повышенный; В – высокий.

Номер задания	Проверяемые требования (умения)	Коды проверяемых требований к уровню подготовки (по кодификатору)	Коды проверяемых элементов содержания (по кодификатору)	Уровень сложности задания	Максимальный балл за выполнение задания	Примерное время выполнения задания выпускником, изучавшим математику на базовом уровне (в мин.)	Примерное время выполнения задания выпускником, изучавшим математику на профильном уровне (в мин.)
9	Уметь выполнять действия с функциями	3.1, 5.1	2.1, 2.2, 3.1–3.3	П	1	15	8

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор
ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений»

О.А. Решетникова
«___» октября 2021 г.

«СОГЛАСОВАНО»
Председатель
Научно-методического совета
ФГБНУ «ФИПИ» по математике

_____________ И.В. Ященко
«27» октября 2021 г.

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Спецификация
контрольных измерительных материалов
для проведения в 2022 году

Обобщённый план варианта КИМ ЕГЭ 2022 года
по МАТЕМАТИКЕ (профильный уровень)

Используются следующие условные обозначения.
Уровни сложности заданий: Б – базовый; П – повышенный; В – высокий.

Номер задания	Проверяемые требования (умения)	Коды проверяемых требований к уровню подготовки (по кодификатору)	Коды проверяемых элементов содержания (по кодификатору)	Уровень сложности задания	Максимальный балл за выполнение задания	Примерное время выполнения задания выпускником, изучавшим математику на базовом уровне (в мин.)	Примерное время выполнения задания выпускником, изучавшим математику на профильном уровне (в мин.)
9	Уметь выполнять действия с функциями	3.1, 5.1	2.1, 2.2, 3.1–3.3	П	1	15	8

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор
ФГБНУ «Федеральный институт
педагогических измерений»

О.А. Решетникова
[illegible] 2021 г.

«СОГЛАСОВАНО»
Председатель
Научно-методического совета
ФГБНУ «ФИПИ» по математике

____________ Д.В. Липанов
«27» октября 2021 г.

			зультат
3	**Уметь выполнять действия с функциями:**		
3.1	определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции; описывать по графику поведение и свойства функции, находить по графику функции наибольшее и наименьшее значения; строить графики изученных функций	– сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; – сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа	– сформированность понятийного аппарата по основным разделам курса математики; знаний основных теорем, формул и умения их применять; умения доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач; – сформированность умений моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат; – сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей
3.2	вычислять производные и первообразные элементарных функций		
3.3	исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшее и наименьшее значения функции		

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор
ФГБНУ «Федеральный институт
педагогических измерений»

О.А. Решетникова
«__» октября 2021 г.

«СОГЛАСОВАНО»
Председатель
Научно-методического совета
ФГБНУ «ФИПИ» по математике

________________ Д.В. Липанов
«27» октября 2021 г.

5	**Уметь строить и исследовать простейшие математические модели:**		
5.1	моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи; исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры	– сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; – владение стандартными приёмами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем	– сформированность понятийного аппарата по основным разделам курса математики; знаний основных теорем, формул и умения их применять; умения доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач; – сформированность умений моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат; – сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей

2.1	**Уравнения**			
	2.1.1	Квадратные уравнения	Решение задач на движение и совместную работу с помощью линейных и квадратных уравнений и их систем	Решение задач с использованием свойств степеней и корней, многочленов, преобразований многочленов и дробно-рациональных выражений
	2.1.2	Рациональные уравнения	Решение задач с использованием свойств степеней и корней, многочленов, преобразований многочленов и дробно-рациональных выражений	
	2.1.3	Иррациональные уравнения		
	2.1.4	Тригонометрические уравнения	Решение тригонометрических уравнений	Тригонометрические уравнения. Однородные тригонометрические уравнения
	2.1.5	Показательные уравнения	Простейшие показательные уравнения и неравенства	Простейшие показательные уравнения и неравенства
	2.1.6	Логарифмические уравнения	Логарифмические уравнения и неравенства	Логарифмические уравнения и неравенства
	2.1.7	Равносильность уравнений, систем уравнений	Решение задач на движение и совместную работу с помощью линейных и квадратных уравнений и их систем	Решение задач на движение и совместную работу, смеси и сплавы с помощью линейных, квадратных и дробно-рациональных уравнений и их систем
	2.1.8	Простейшие системы уравнений с двумя неизвестными		
	2.1.9	Основные приёмы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных		
	2.1.10	Использование свойств и графиков функций при решении уравнений	Графическое решение уравнений и неравенств	Графическое решение уравнений и неравенств
	2.1.11	Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений с двумя переменными и их систем		
	2.1.12	Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений	Решение задач на движение и совместную работу с помощью линейных и квадратных уравнений и их систем. Решение задач с помощью числовых неравенств и систем неравенств с одной переменной, с применением изображения числовых промежутков. Решение задач с использованием числовых функций и их графиков	Решение задач на движение и совместную работу, смеси и сплавы с помощью линейных, квадратных и дробно-рациональных уравнений и их систем. Решение задач с помощью числовых неравенств и систем неравенств с одной переменной, с применением изображения числовых промежутков. Решение задач с использованием числовых функций и их графиков

2.2	**Неравенства**			
	2.2.1	Квадратные неравенства	Решение задач с помощью числовых неравенств и систем неравенств с одной переменной, с применением изображения числовых промежутков	Решение задач с помощью числовых неравенств и систем неравенств с одной переменной, с применением изображения числовых промежутков
	2.2.2	Рациональные неравенства		
	2.2.3	Показательные неравенства	Простейшие показательные уравнения и неравенства	Простейшие показательные уравнения и неравенства
	2.2.4	Логарифмические неравенства	Логарифмические уравнения и неравенства	Логарифмические уравнения и неравенства
	2.2.5	Системы линейных неравенств	Решение задач с помощью числовых неравенств и систем неравенств с одной переменной, с применением изображения числовых промежутков	Решение задач с помощью числовых неравенств и систем неравенств с одной переменной, с применением изображения числовых промежутков
	2.2.6	Системы неравенств с одной переменной		
	2.2.7	Равносильность неравенств, систем неравенств		Использование неравенств и систем неравенств с одной переменной, числовых промежутков, их объединений и пересечений
	2.2.8	Использование свойств и графиков функций при решении неравенств	Графическое решение уравнений и неравенств	Графические методы решения уравнений и неравенств
	2.2.9	Метод интервалов	*Метод интервалов для решения неравенств*	Метод интервалов для решения неравенств
	2.2.10	Изображение на координатной плоскости множества решений неравенств с двумя переменными и их систем	Графическое решение уравнений и неравенств	Графическое решение уравнений и неравенств

3.1	**Определение и график функции**		
3.1.1	Функция, область определения функции	Решение задач с использованием числовых функций и их графиков	Решение задач с использованием числовых функций и их графиков
3.1.2	Множество значений функции		
3.1.3	График функции. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях		
3.1.4	Обратная функция. График обратной функции	*Обратные тригонометрические функции, их свойства и графики*	Обратные тригонометрические функции, их главные значения, свойства и графики. Взаимно обратные функции. Графики взаимно обратных функций
3.1.5	Преобразования графиков: параллельный перенос, симметрия относительно осей координат	*Преобразования графиков функций: сдвиг вдоль координатных осей, растяжение и сжатие, отражение относительно координатных осей*	Преобразования графиков функций: сдвиг, умножение на число, отражение относительно координатных осей
3.2	**Элементарное исследование функций**		
3.2.1	Монотонность функции. Промежутки возрастания и убывания	Решение задач с использованием числовых функций и их графиков. Нули функции, промежутки зна-	Нули функции, промежутки знакопостоянства, монотонность
3.2.2	Чётность и нечётность функции	Чётность и нечётность функций	Чётные и нечётные функции
3.2.3	Периодичность функции	Периодические функции	Периодические функции и наименьший период
3.2.4	Ограниченность функции	Решение задач с использованием числовых функций и их графиков	Решение задач с использованием числовых функций и их графиков
3.2.5	Точки экстремума (локального максимума и минимума) функции	Точки экстремума (максимума и минимума)	Точки экстремума (максимума и минимума)
3.2.6	Наибольшее и наименьшее значения функции	Наибольшее и наименьшее значение функции	Наибольшее и наименьшее значение функции
3.3	**Основные элементарные функции**		
3.3.1	Линейная функция, её график	Использование свойств и графиков линейных и квадратичных функций, обратной пропорциональности	Использование свойств и графиков линейных и квадратичных функций, обратной пропорциональности
3.3.2	Функция, описывающая обратную пропорциональную зависимость, её график		
3.3.3	Квадратичная функция, её график		
3.3.4	Степенная функция с натуральным показателем, её график	Степенная функция, её свойства и график	Степенная функция, её свойства и график
3.3.5	Тригонометрические функции, их графики	Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$. *Функция* $y = \operatorname{ctg} x$. Свойства и графики тригонометрических функций	Тригонометрические функции числового аргумента $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. Свойства и графики тригонометрических функций
3.3.6	Показательная функция, её график	Показательная функция, её свойства и график	Показательная функция, её свойства и график
3.3.7	Логарифмическая функция, её график	Логарифмическая функция, её свойства и график	Логарифмическая функция, её свойства и график

ТЕМАТИКА ЗАДАЧ
(в соответствии с материалами Открытого Банка заданий ЕГЭ - 2022)

- *Линейная функция (прямая)*
- *Квадратичная функция (парабола)*
- *Дробно-рациональная функция (гипербола) и квадратный корень* $y = \sqrt{x}$
- *Тригонометрические функции*
- *Показательная и логарифмическая функции*
- *Пересечение графиков двух функций*

АКТУАЛИЗАЦИЯ НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ ЗНАНИЙ

Виды графиков функций

Решение систем уравнений

Основные свойства функций

№ 9

Решение уравнений

Преобразование графиков функций

РЕАЛИЗАЦИЯ ТЕМАТИКИ В РАЗЛИЧНЫХ УМК уровней ООО и СОО

А.Г. Мордкович и др.
§§ 21-23

А.Г. Мерзляк и др.
Глава 2, §§ 8-11

Ю.Н. Макарычев и др.
§ 3, пункт 6, § 4, пункт 10

Ш.А. Алимов и др.
Глава V, § 39

А.Г. Мордкович и др.
Глава 2,
Глава 3 , §§ 17-18

С.М. Никольский и др.
Глава 1, § 1

Ш.А. Алимов и др.
Глава III, § 14

ОСНОВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

	Функция	Преобразование графика
1	$y = f(x) + a$, где $a > 0$	Смещение графика $y = f(x)$ (параллельный перенос) вдоль оси Oy на a единиц вверх
2	$y = f(x) - a$, где $a > 0$	Смещение графика $y = f(x)$ (параллельный перенос) вдоль оси Oy на a единиц вниз
3	$y = f(x + m)$, где $m > 0$	Смещение графика $y = f(x)$ (параллельный перенос) вдоль оси Ox на m единиц влево
4	$y = f(x - m)$, где $m > 0$	Смещение графика $y = f(x)$ (параллельный перенос) вдоль оси Ox на m единиц вправо
5	$y = kf(x)$, где $k > 1$	Растяжение графика $y = f(x)$ вдоль оси Oy в k раз
6	$y = kf(x)$, где $k < -1$	Растяжение графика $y = f(x)$ вдоль оси Oy в $\|k\|$ раз и симметрия относительно оси Ox

7	$y=\frac{1}{k}f(x)$, где $0<\frac{1}{k}<1$	Сжатие графика $y=f(x)$ к оси Ox (вдоль оси Oy) в k раз
8	$y=\frac{1}{k}f(x)$, где $-1<\frac{1}{k}<0$	Сжатие графика $y=f(x)$ к оси Ox (вдоль оси Oy) в $\|k\|$ раз и симметрия относительно оси Ox
9	$y=f(kx)$, где $k>1$	Сжатие графика $y=f(x)$ в k раз к оси Oy (вдоль оси Ox)
10	$y=f\left(\frac{1}{k}x\right)$, где $0<k<1$	Растяжение графика $y=f(x)$ в k раз вдоль оси Ox
11	$y=f(kx)$, где $k<-1$	Сжатие графика $y=f(x)$ в $\|k\|$ раз к оси Oy (вдоль оси Ox) и симметрия относительно оси Oy
12	$y=f\left(\frac{1}{k}x\right)$, где $-1<k<0$	Растяжение графика $y=f(x)$ в $\|k\|$ раз вдоль оси Ox и симметрия относительно оси Oy
13	$y=f(x+m)+a$	Смещение (параллельный перенос) графика $y=f(x)$ на $-m$ единиц вдоль оси Ox и на a единиц вдоль оси Oy
14	$y=kf(x+m)+a$	Преобразование графика функции $y=f(x)$ в график $y=kf(x)$, а затем смещение (параллельный перенос) на $-m$ единиц вдоль оси Ox и на a единиц вдоль оси Oy

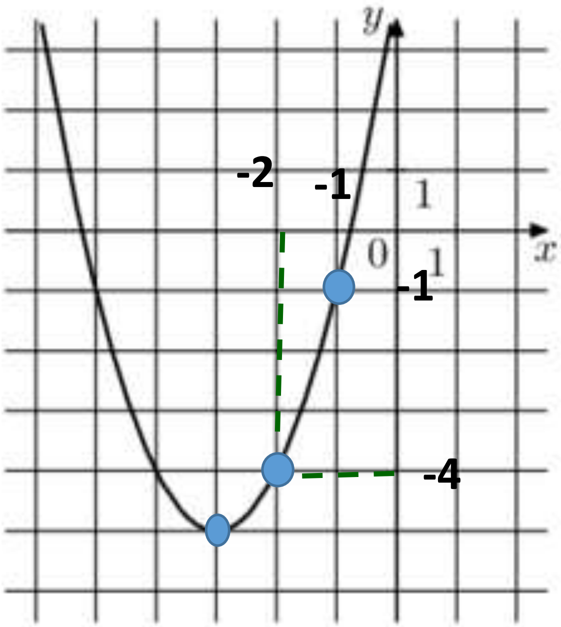
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

На рисунке изображен график функции

$f(x) = ax^2 + bx + c$ **, где числа** a, b, c **– целые.**

Найдите $f(1)$ **.**



РЕШЕНИЕ.

1 способ (универсальный)

1) $a = 1.$

2) (-1;-1): $-1 = 1\cdot(-1)^2 - b + c;\ \ c - b = -2.$

3) (-2;-4): $-4 = 1(-2)^2 - 2b + c;\ \ c - 2b = -8.$

4) $\begin{cases} c - b = -2, \\ c - 2b = -8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 6, \\ c = 4. \end{cases}$

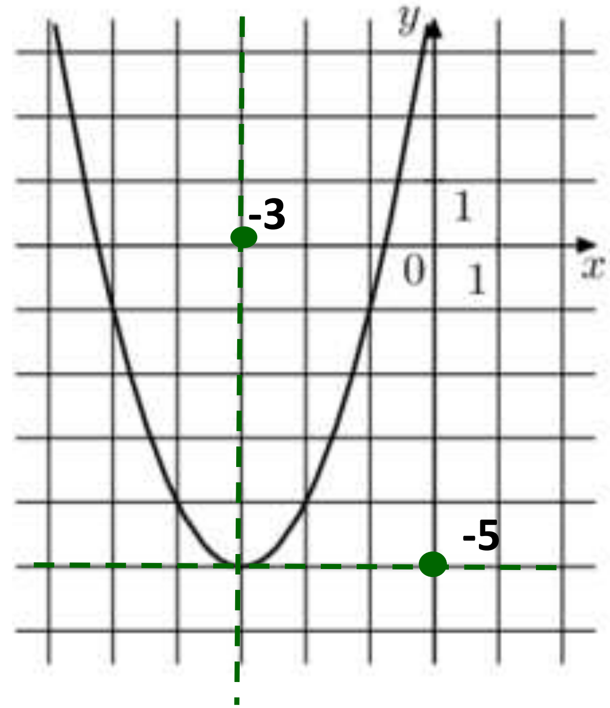
5) $f(x) = x^2 + 6x + 4,\ \ f(1) = 1^2 + 6\cdot 1 + 4 = 11.$

Задача 1

На рисунке изображен график функции

$f(x) = ax^2 + bx + c$ **, где числа** a, b, c **– целые.**

Найдите $f(1)$ **.**



РЕШЕНИЕ.

2 способ (преобразование графиков)

1) $a = 1.$

2) Любая парабола может быть задана уравнением вида:

$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0,$ *где* $(x_0; y_0)$ *- вершина параболы.*

3) (-3;-5) – вершина, значит: $f(x) = 1(x+3)^2 - 5.$

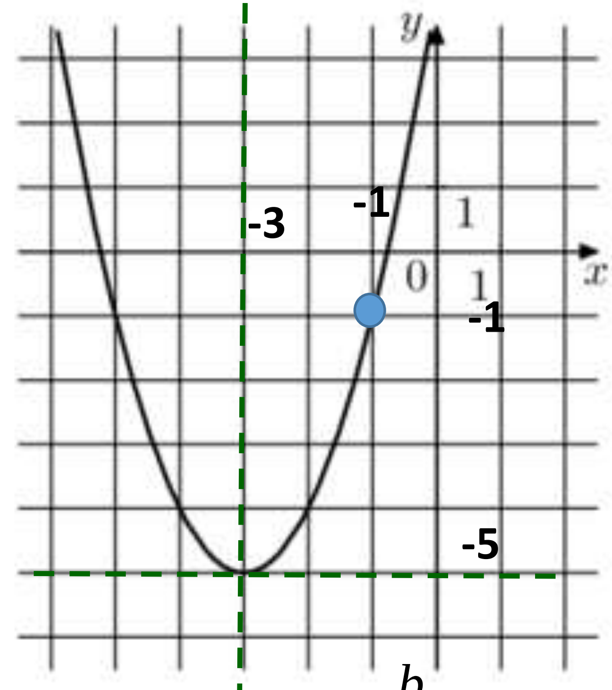
4) $f(1) = (1+3)^2 - 5 = 16 - 5 = 11.$

<u>*Задача 1*</u>

На рисунке изображен график функции

$f(x) = ax^2 + bx + c$ **, где числа** a, b, c **– целые.**

Найдите $f(1)$ **.**



<u>*РЕШЕНИЕ.*</u>

3 способ (комбинированный)

1) $a = 1.$

2) Формула для вычисления абсциссы вершины параболы : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

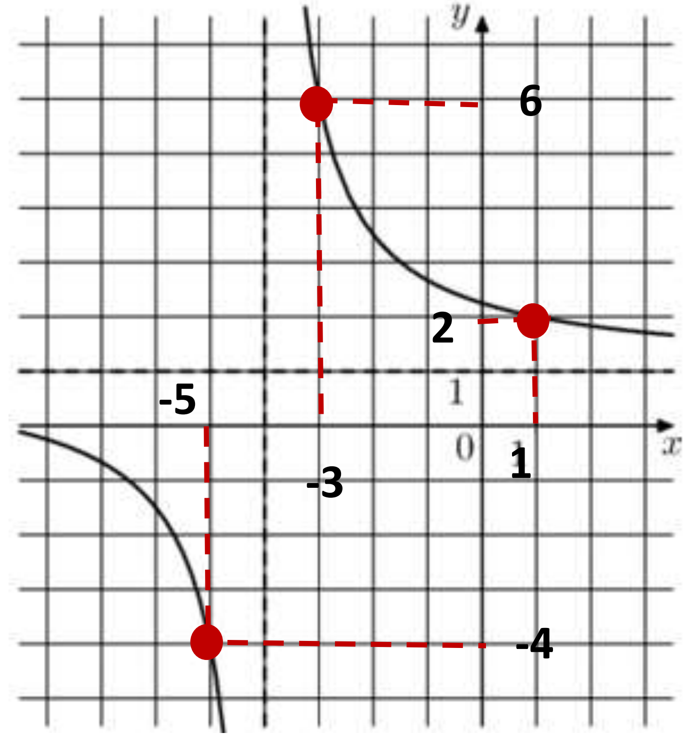
3) Значит, $-3 = -\dfrac{b}{2\cdot 1} \Rightarrow b = 6.$

4) Найдем с. (-1;-1). $f(x) = x^2 + 6x + c, -1 = 1^2 - 6\cdot 1 + c, c = 4.$

5) $f(x) = x^2 + 6x + 4, \quad f(1) = 1^2 + 6\cdot 1 + 4 = 11.$

Задача 2

На рисунке изображен график функции $f(x)=\dfrac{kx+a}{x+b}$. **Найдите** k.



РЕШЕНИЕ.

1 способ (универсальный)

1) *Выберем три точки с целочисленными координатами.*

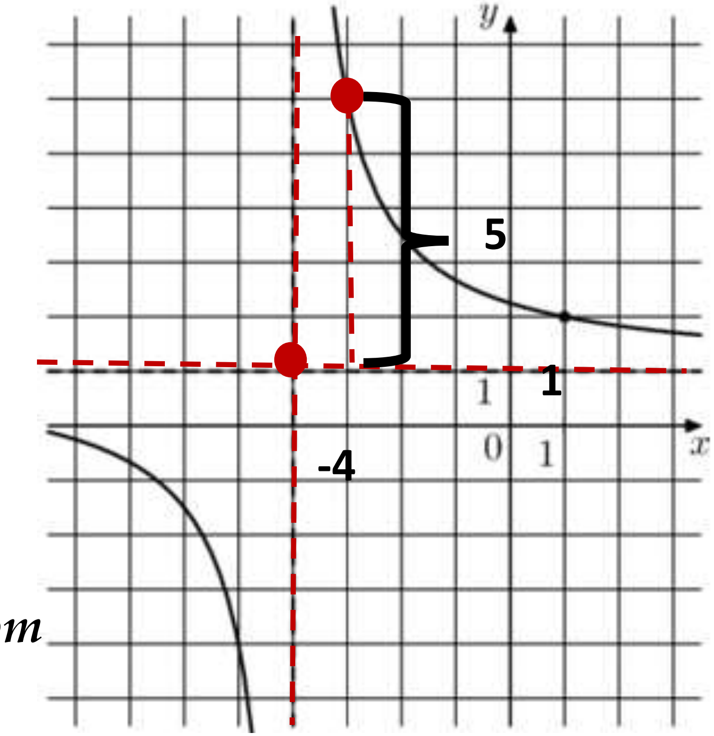
2) *(1;2), (-3;6), (-5;-4).*

$$\begin{cases}\dfrac{k+a}{1+b}=2,\\[2mm] \dfrac{a-3k}{b-3}=6,\\[2mm] \dfrac{a-5k}{b-5}=-4;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a-2b+k=2,\\ a-6b-3k=18,\\ a+4b+5k=20;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=9,\\ b=4,\\ k=1.\end{cases}$$

3) *Значит,* $k=1.$

Задача 2

На рисунке изображен график функции $f(x)=\dfrac{kx+a}{x+b}$. **Найдите** k .



РЕШЕНИЕ.

2 способ (преобразование графиков)

1) ***Проведем асимптоты гиперболы.***

2) ***Координаты точки пересечения асимптот (-4; 1).***

3) ***Любая гипербола может быть задана формулой вида:***

$$y=\frac{m}{x-x_0}+y_0,$$ ***где*** $(x_0; y_0)$ ***координаты начала отсчета вспомогательной системы координат.***

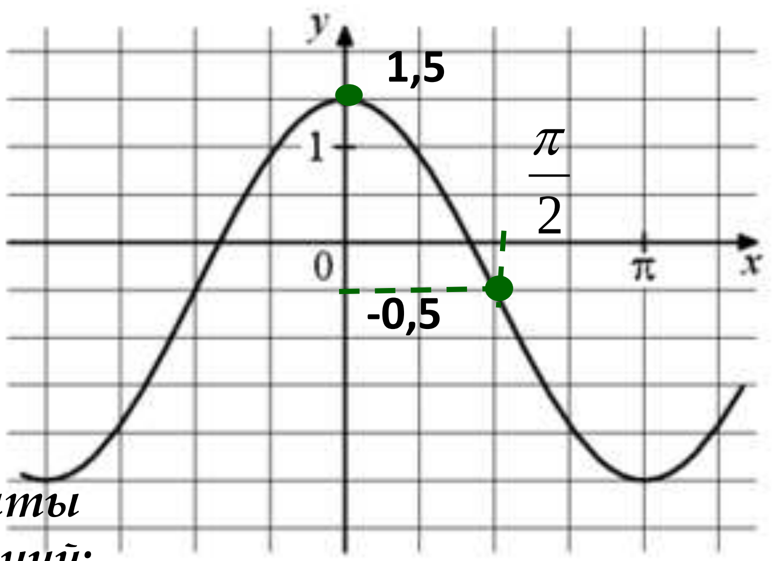
4) ***Найдем m.***

5) ***Значит, m=5. Тогда, гипербола может быть задана*** $y=\dfrac{5}{x+4}+1$

или $y=\dfrac{x+9}{x+4}$. ***Таким образом,*** $k=1.$

Задача 3

На рисунке изображен график функции $f(x) = a\cos x + b$ **. Найдите** a.



РЕШЕНИЕ.

1 способ (универсальный)

1) *Выберем на графике две точки, координаты которых можно определить без затруднений:*

$$\left(\frac{\pi}{2};-0{,}5\right) \quad и \quad (0;1{,}5).$$

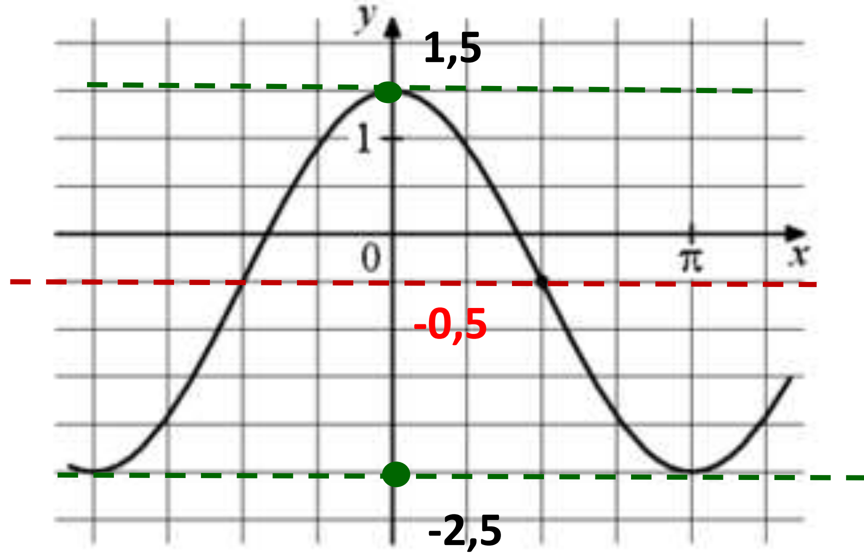
2) *Составим и решим систему уравнений:*

$$\begin{cases} -0{,}5 = a\cos\frac{\pi}{2} + b, \\ 1{,}5 = a\cos 0 + b; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -0{,}5, \\ a = 2. \end{cases}$$

3) *Таким образом,* $a = 2.$

Задача 3

На рисунке изображен график функции $f(x) = a\cos x + b$. Найдите a.



РЕШЕНИЕ.

2 способ (преобразование графиков)

1) *Найдем вспомогательную ось* Ox_1.

2) *Очевидно, что* $b = -0{,}5$.

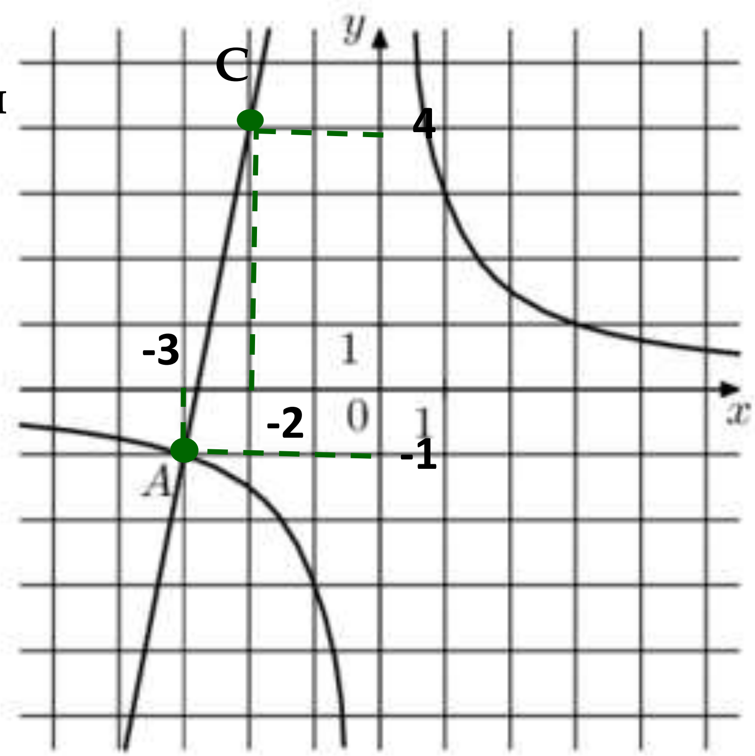
3) *(0; 1,5) – точка графика, значит:*

$$1{,}5 = a\cos 0 - 0{,}5;$$

$$a = 2.$$

Задача 4

На рисунке изображены графики функций $f(x)=\dfrac{k}{x}$ и $g(x)=ax+b$, которые пересекаются в точках А и В . Найдите ординату точки В.



РЕШЕНИЕ.

1 способ (универсальный)

1) A(-3; -1) – точка гиперболы, значит:

$$-1=\frac{k}{-3};$$

$$k=3.$$

2) Гипербола задана формулой $f(x)=\dfrac{3}{x}.$

3) A(-3; -1) и C(-2;4) – точки прямой, значит: $\begin{cases}-3a+b=-1,\\ -2a+b=4;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=5,\\ b=14.\end{cases}$

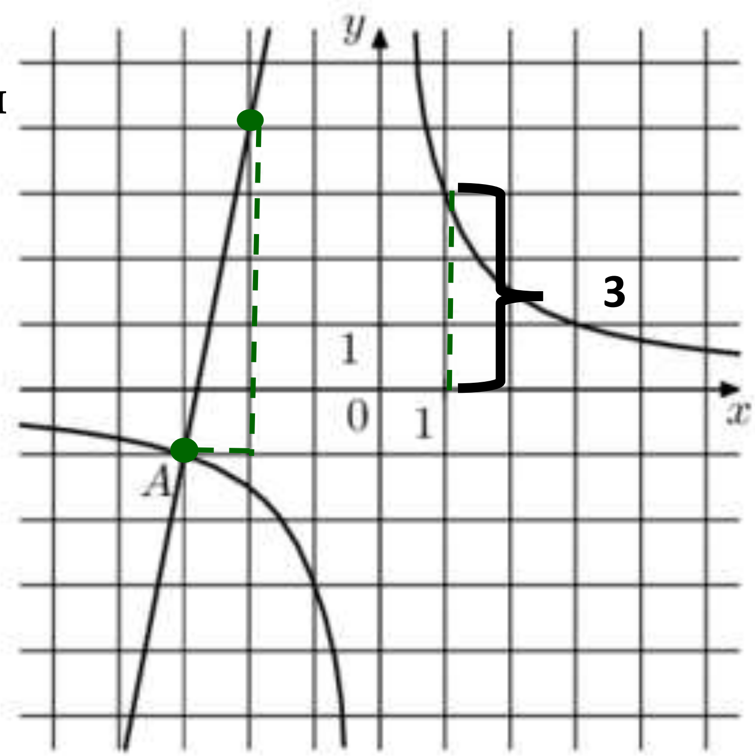
4) Уравнение прямой $g(x)=5x+14.$

4) Найдем абсциссы точек пересечения, решив уравнение $5x+14=\dfrac{3}{x}.$

$x_1=-3, x_2=0{,}2.$ $g(0{,}2)=15.$ ***Ордината точки В равна 15.***

Задача 4

На рисунке изображены графики функций $f(x)=\frac{k}{x}$ и $g(x)=ax+b$, которые пересекаются в точках А и В . Найдите ординату точки В.



РЕШЕНИЕ.

2 способ (комбинированный)

1) *Определим* k.

2) *Гипербола задана формулой* $f(x)=\frac{3}{x}$.

3) *Найдем угловой коэффициент прямой* a.

4) a=5:1=5.

5) А(-3; -1) – *точка прямой, значит:* $-1=5\cdot(-3)+b, b=14$.

6) *Уравнение прямой* $g(x)=5x+14$.

7) *Найдем абсциссы точек пересечения, решив уравнение* $5x+14=\frac{3}{x}$.

Ордината точки В равна 15.

При подготовке были использованы материалы открытых источников:

- *[Документы, определяющие структуру и содержание КИМ ЕГЭ 2022]*
- *[Открытый банк заданий ЕГЭ ФИПИ]*
- *[Федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность]*
- *[Открытый банк ЕГЭ по математике]*
- *[Материалы онлайн-консультации И.Ященко по подготовке к ЕГЭ по математике]*


УСПЕХОВ,
УВАЖАЕМЫЕ
КОЛЛЕГИ!

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Любой квадратный трёхчлен ax^2+bx+c, где $a \neq 0$, можно представить в виде $a(x-x_0)^2+y_0$, где x_0 – абсцисса вершины параболы $y=ax^2+bx+c$, y_0 – ордината вершины параболы.

Доказательство:

$$ax^2+bx+c=(ax^2+bx)+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=$$

$$=a\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a}+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a}=$$

$$=a\left(x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a}$$

Рассмотрим функцию $y=ax^2+bx+c$, где $a \neq 0$. Квадратичная. Графиком является парабола. Найдём координаты вершины параболы.

$x_0=-\dfrac{b}{2a}$ – абсцисса вершины параболы,

$$y_0 = y(x_0) = y\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = a\cdot\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c =$$

$$= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$ – ордината вершины параболы.

Сопоставим полученные выражения координат вершины параболы с выражениями, полученными в результате преобразования квадратного трёхчлена. Заметим, что

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - \boxed{\begin{array}{l}\text{абсцисса}\\ \text{вершины}\\ \text{параболы}\end{array}}\right)^2 + \boxed{\begin{array}{l}\text{ордината}\\ \text{вершины}\\ \text{параболы}\end{array}}$$

Теорема доказана.

Если вершина параболы располагается в узле сетки, то применение этой формулы позволяет свести решение к нахождению одного параметра (вместо трёх). Если вершина параболы располагается не в узле сетки, то этот способ неприменим.

PS Клетчатую бумагу называют сеткой. Точки пересечения горизонтальных и вертикальных линеек являются узлами сетки.