Частное и общее

Да, может

Нет, нельзя

Утверждения типа «*хотя бы один*» называют утверждениями о существовании.

В них говорится, что в заданном множестве существует хотя бы один элемент, обладающий указанным свойством.

Утверждения о существовании можно доказать приведением примера.

В задачах практического содержания достаточно тщательно проанализировать условие задачи, попытаться выполнить с конкретными числами те действия, о которых идёт речь в задаче, и ситуация, соответствующая условию задания, обнаруживается довольно быстро.

Задача 1 (открытый вариант ЕГЭ-2022, № 18а)). Есть четыре коробки: в первой 101 камень, во второй – 102, в третьей – 103, а в четвёртой коробке камней нет. За один ход берут по одному камню из любых трёх коробок и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.

а) Могло ли в первой коробке оказаться 97 камней, во второй – 102, в третьей – 103, а в четвёртой 4?

Решение удобно оформить в виде таблицы

Номер хода	Первая коробка	Вторая коробка	Третья коробка	Четвёртая коробка
1-й ход,	101	102	103	-
результат	100	101	102	3
2-й ход,	100	101	102	3
результат	99	104	101	2
3-й ход,	99	104	101	2
результат	98	103	104	1
4-й ход,	98	103	104	1
результат	**97**	**102**	**103**	**4**

Получили в первой коробке 97 камней, во второй – 102, в третьей 103, а в четвёртой – 4 камня, что соответствует условию задачи. Отвечаем на заданный вопрос: «Да, могло так быть».

Ответ: да, могло.

PS Это не единственное решение. Это решение с минимальным количеством шагов. Но есть и другое решение с таким же количеством шагов. Поскольку количество шагов в задаче не ограничено, то любое решение, приводящее к результату 97-102-103-4, является доказательством, что правильный ответ в задаче «Да, могло».

В более сложных задачах конкретный пример не столь очевиден. В таком случае можно ввести буквенную символику (чтобы рассмотреть ситуацию в общем виде), построить математическую модель и выполнить её преобразования, провести логическое исследование для обнаружения конкретной ситуации, соответствующей условию задачи. Рассмотрим пример такого подхода к решению.

Задача 2 (тренировочное задание № 502027, сайт https://ege.sdamgia.ru/archive). Дано трёхзначное натуральное число, не кратное 100.

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 90?

б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 88?

Решение. а) Пусть $\overline{abc}$ – исходное трёхзначное число, не кратное 100. Тогда частное этого числа и суммы его цифр равно $\dfrac{100a+10b+c}{a+b+c}$, что по условию задачи равно 90. Имеем:

$$\frac{100a+10b+c}{a+b+c}=90;$$

$$100a+10b+c=90(a+b+c);$$

$$100a+10b+c=90a+90b+90c;$$

$$10a-80b=89c.$$

При *c* = 0, *b* = 1, *a* = 8, полученное равенство верно. Можем построить конкретный пример: исходное число – это 810. Число не кратно 100, а частное этого числа и суммы его цифр равно $\dfrac{810}{8+1+0}$.

Значение этого частного 90, что соответствует условию задачи. Следовательно, да, частное могло быть равно 90.

б) **Выполняя задание типа «НЕТ, НЕ МОГЛО», следует иметь ввиду, что привести даже большое количество примеров недостаточно.**

Доказывая истинность общего утверждения, мы должны показать, что *<u>все элементы</u>* некоторого множества обладают определённым свойством.

Поэтому самый простой приём доказательства состоит в том, что мы «испытываем» по очереди все элементы множества, перебирая их один за другим, и проверяя для каждого из них доказываемое утверждение. Когда эти элементы «закончатся», то утверждение будет доказано.

Рассмотрим применение этого приёма при выполнении задания б): Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 88?

Решение. Предположим, что частное трёхзначного числа, не кратного 100, и суммы его цифр может быть равно 88.

$\overline{abc}$ – исходное трёхзначное число, не кратное 100. Тогда частное этого числа и суммы его цифр равно $\frac{100a+10b+c}{a+b+c}$, что по условию задачи равно 88. Имеем:

$$\frac{100a+10b+c}{a+b+c}=88;$$

$$100a + 10b + c = 88(a + b + c);$$

$$100a + 10b + c = 88a + 88b + 88c;$$

$$12a = 78b + 87c;$$

$$4a = 26b + 29c.$$

a – первая цифра числа, поэтому a – натуральное число, удовлетворяющее неравенству $1 \le a \le 9$.

Выполняя тождественные преобразования неравенства, и учитывая, что значения выражений $4a$ и $26b + 29c$ равны, получаем

$$4 \le 4a \le 36;$$

$$4 \le 26b + 29c \le 36.$$

Учтём, что *b* и *c* – вторая и третья цифры числа. Тогда последнему неравенству удовлетворяют только следующие пары значений *b* и *c*: (0;1), (1; 0).

Если $b = 0$, $c = 1$, то

$$4a = 26b + 29c = 26 \cdot 0 + 29 \cdot 1 = 29;$$

$$4a = 29;$$

$a = 7,25 -$ результат противоречит смыслу символа (первая цифра числа не может быть такой).

Следовательно, пара (0; 1) не подходит.

Если $b = 1$, $c = 0$, то

$$4a = 26b + 29c = 26 \cdot 1 + 29 \cdot 0 = 26;$$

$$4a = 26;$$

$a = 6,5 -$ результат противоречит смыслу символа (первая цифра числа не может быть такой).

Пара (1; 0) тоже не подходит.

Других пар значений b и c нет. Следовательно, нет, не может частное трёхзначного числа и суммы его цифр быть равным 88.

Ответ: а) да, может; б) нет, не может.

Но, если допустимых элементов много, то метод перебора становится трудоёмким, а если множество бесконечно, то и вообще неприменимым. Нельзя «испытать» все элементы бесконечного множества. И **при любом количестве испытаний может оказаться, что ещё не проверенный элемент как раз и опровергает утверждение, которое мы хотим доказать.**

В этом случае полезно разбить математическую модель на части и исследовать их делимость на какое-либо число (или изучать остатки от деления, или изучать последнюю цифру результата выполняемых действий и т. д.).

Пример 3. Из четырёхзначного числа вычитают сумму его цифр, а затем ответ делят на 3. Может ли получиться в результате число 500?

Решение. Пусть $\overline{abcd}$ – исходное четырёхзначное число. Тогда разность этого числа и суммы его цифр равна

$$(1000a+100b+10c+d)-(a+b+c+d)=$$

$$=999a+99b+9c=9(111a+11b+c).$$

Делим ответ на 3. Получаем

$$\frac{9(111a+11b+c)}{3}=3(111a+11b+c).$$

Результат без остатка делится на 3. Число 500 не делится на 3. Следовательно, число 500 не может получиться в результате выполнения действий.

Ответ: нет, не может.

Задача 4. (открытый вариант ЕГЭ-2018, № 19а, б)) На доске написано 30 различных натуральных чисел, десятичная запись каждого из которых оканчивается или на цифру 2, или на цифру 6. Сумма всех написанных чисел равна 2454.

а) Может ли на доске быть поровну чисел, оканчивающихся на 2 и на 6?

б) Может ли ровно 1 число на доске оканчиваться на 6?

Решение. а) По условию задачи на доске написано 30 чисел. Тогда

- 15 чисел оканчиваются на 2
- и 15 чисел оканчиваются на 6.

Сумма 15 чисел, оканчивающихся на 2, оканчивается на 0.

Сумма 15 чисел, оканчивающихся на 6, оканчивается на 0.

Тогда сумма всех 30 чисел оканчивается на 0. Однако, по условию задачи сумма равна 2454, то есть оканчивается на 4. Противоречие. Следовательно, нет, на доске не может быть поровну чисел, оканчивающихся на 2, и чисел, оканчивающихся на 6.

б) Если на доске ровно одно число, оканчивающееся на 6, то остальные 29 чисел оканчиваются на 2. Тогда сумма этих 29 чисел равна 2454 – 6 = 2448.

По условию задачи числа натуральные, различные. Рассмотрим множество наименьших натуральных различных чисел, оканчивающихся на 2. Это

2; 12; 22; 32;...; 282 – арифметическая прогрессия с разностью 10 и минимальным первым членом.

Найдём сумму всех 29 членов прогрессии. Получим наименьшее значение суммы 29 различных натуральных чисел, оканчивающихся на 2.

$$S=\frac{(2+282)\cdot 29}{2}=\frac{284\cdot 29}{2}=142\cdot 29=4118.$$

$4128 > 2448$.

Полученный результат (а это наименьшее значение) превышает сумму, соответствующую условию задачи. Следовательно, нет, не может ровно одно число на доске оканчиваться на 6.

Ответ: а) нет, не может; б) нет, не может.

ИТОГ

Утверждения о существовании можно доказать приведением примера.

Выполняя задание типа «НЕТ, НЕ МОГЛО», следует иметь ввиду, что привести даже большое количество примеров недостаточно.

Доказывая истинность общего утверждения, мы должны показать, что *все элементы* некоторого множества обладают определённым свойством.

Спасибо за внимание!

- **Панина Н. А.**
- **8 905 162 07 70**