Практикум по решению заданий с параметрами

- Решение задания № 18 из открытого сегмента ЕГЭ-2020
- Основные этапы обоснования ответа при выполнении задания с параметрами на ЕГЭ
- Задание с параметром на ОГЭ

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_7\left(36-y^2\right)=\log_7\left(36-a^2x^2\right), \\ x^2+y^2=2x+6y \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Содержание критериев	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только исключением не более двух из пяти точек: $a=-3$, $a=-\frac{1}{3}$, $a=0$, $a=\frac{1}{3}$, $a=3$	3
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только исключением более двух из пяти точек: $a=-3$, $a=-\frac{1}{3}$, $a=0$, $a=\frac{1}{3}$, $a=3$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения окружности и прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Комментарий: выполняя задание, нужно не только получить правильные ответы, но **и доказать, что других значений параметра, удовлетворяющих условию задачи, нет**. Именно в этом заключается суть исследования.

Метод аналитического исследования: перебор допустимых значений параметра и установление количества решений исходной системы (уравнения, неравенства) на каждом подмножестве значений параметра.

Метод графического исследования: перебор возможных вариантов расположения графиков и анализ количества общих точек графиков уравнений.

Решение.

$$\begin{cases} \log_7\left(36-y^2\right)=\log_7\left(36-a^2x^2\right), \\ x^2+y^2=2x+6y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 36-y^2>0, \\ 36-a^2x^2>0, \\ 36-y^2=36-a^2x^2, \\ x^2+y^2=2x+6y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=a^2x^2, \\ x^2+y^2=2x+6y, \\ y^2<36, \\ a^2x^2<36 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = a^2x^2, \\ x^2 + y^2 = 2x + 6y, \\ -6 < y < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = -ax, \\ y = ax, \end{array}\right. \\ x^2 + y^2 = 2x + 6y, \\ -6 < y < 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=-ax, \\ x^2+y^2=2x+6y, \\ -6<y<6 \end{cases} \\ \begin{cases} y=ax, \\ x^2+y^2=2x+6y, \\ -6<y<6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+(-ax)^2=2x+6\cdot(-ax), \\ y=-ax, \\ -6<y<6 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+(ax)^2=2x+6\cdot ax, \\ y=ax, \\ -6<y<6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x^2+a^2x^2=2x-6ax, \\ y=-ax, \\ -6<y<6 \end{cases} \\ &\begin{cases} x^2+a^2x^2=2x+6\cdot ax, \\ y=ax, \\ -6<y<6 \end{cases} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\begin{cases} \left(a^2+1\right)x^2-(2-6a)x=0, \\ y=-ax, \\ -6<y<6 \end{cases} \\ &\begin{cases} \left(a^2+1\right)x^2-(2+6a)x=0, \\ y=ax, \\ -6<y<6 \end{cases} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\left(\left(a^2+1\right)x-(2-6a)\right)=0, \\ y=-ax, \\ -6<y<6 \end{cases} \\ \begin{cases} x\left(\left(a^2+1\right)x-(2+6a)\right)=0, \\ y=ax, \\ -6<y<6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0, \\ y=-ax, \\ -6<y<6, \end{cases} \\ \begin{cases} \left(a^2+1\right)x-(2-6a)=0, \\ y=-ax, \\ -6<y<6, \end{cases} \\ \begin{cases} x=0, \\ y=ax, \\ -6<y<6 \end{cases} \\ \begin{cases} \left(a^2+1\right)x-(2+6a)=0, \\ y=ax, \\ -6<y<6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{2-6a}{a^2+1}, \\ y = -ax, \\ -6 < y < 6, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{2+6a}{a^2+1}, \\ y = ax, \\ -6 < y < 6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{2-6a}{a^2+1}, \\ y = \dfrac{6a^2-2a}{a^2+1}, \\ -6 < y < 6, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{2+6a}{a^2+1}, \\ y = \dfrac{6a^2+2a}{a^2+1}, \\ -6 < y < 6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{2-6a}{a^2+1}, \\ y = \dfrac{6a^2-2a}{a^2+1}, \\ -6 < \dfrac{6a^2-2a}{a^2+1} < 6, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{2+6a}{a^2+1}, \\ y = \dfrac{6a^2+2a}{a^2+1}, \\ -6 < \dfrac{6a^2+2a}{a^2+1} < 6. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решим двойные неравенства.

1) $-6<\dfrac{6a^2-2a}{a^2+1}<6 \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad -6\left(a^2+1\right)<6a^2-2a<6\left(a^2+1\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -6a^2-6<6a^2-2a<6a^2+6 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -6a^2-6<6a^2-2a, \\ 6a^2-2a<6a^2+6 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 12a^2-2a+6>0, \\ a>-3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 6a^2-a+3>0, \\ a>-3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a>-3.$$

2) $-6<\dfrac{6a^2+2a}{a^2+1}<6 \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad -6\left(a^2+1\right)<6a^2+2a<6\left(a^2+1\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -6a^2-6<6a^2+2a<6a^2+6 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -6a^2-6<6a^2+2a, \\ 6a^2+2a<6a^2+6 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 12a^2+2a+6>0, \\ a<3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 6a^2+a+3>0, \\ a<3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a<3.$$

Получили

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{2-6a}{a^2+1},\\[2mm] y=\dfrac{6a^2-2a}{a^2+1},\\[2mm] a>-3,\end{cases}\\[8mm] \begin{cases}x=0,\\ y=0,\end{cases}\\[6mm] \begin{cases}x=\dfrac{2+6a}{a^2+1},\\[2mm] y=\dfrac{6a^2+2a}{a^2+1},\\[2mm] a<3.\end{cases}\end{array}\right.$$

То есть пара $\left(\frac{2-6a}{a^2+1};\frac{6a^2-2a}{a^2+1}\right)$ является решением исходной системы при $a>-3$,

пара $\left(\frac{2+6a}{a^2+1};\frac{6a^2+2a}{a^2+1}\right)$ является решением исходной системы при $a<3$,

пара (0; 0) является решением исходной системы при любом значении a.

Выясним, при каких значениях a, пары совпадают.

1) $\left(\frac{2-6a}{a^2+1}; \frac{6a^2-2a}{a^2+1}\right)$ и $\left(\frac{2+6a}{a^2+1}; \frac{6a^2+2a}{a^2+1}\right)$

$$\begin{cases} \dfrac{2-6a}{a^2+1} = \dfrac{2+6a}{a^2+1}, \\ \dfrac{6a^2-2a}{a^2+1} = \dfrac{6a^2+2a}{a^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-6a = 2+6a, \\ 6a^2-2a = 6a^2+2a \end{cases} \Leftrightarrow a = 0.$$

2) $\left(\dfrac{2-6a}{a^2+1}; \dfrac{6a^2-2a}{a^2+1}\right)$ и (0; 0)

$$\begin{cases} \dfrac{2-6a}{a^2+1}=0, \\ \dfrac{6a^2-2a}{a^2+1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{6a^2-2a}{a^2+1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad a=\dfrac{1}{3}.$$

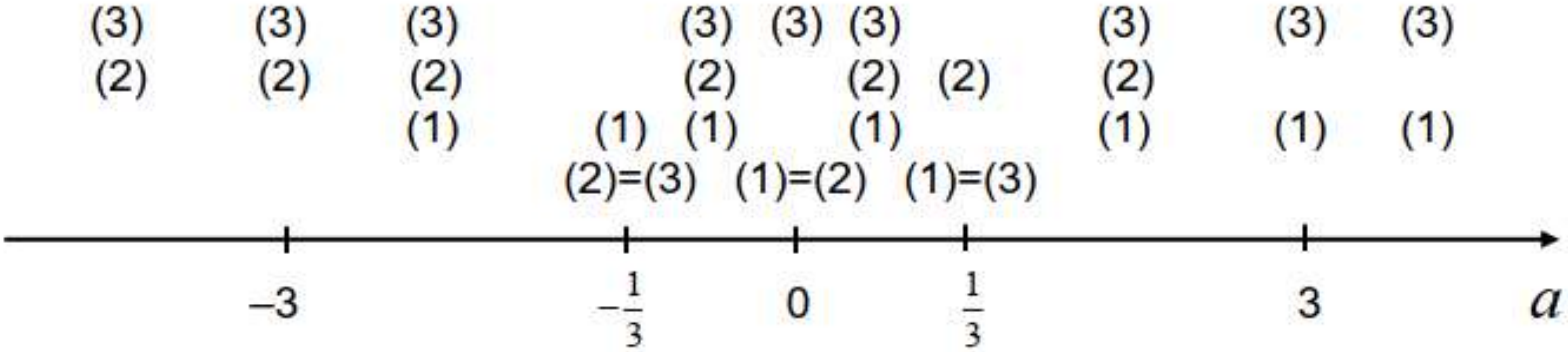
3) $\left(\frac{2+6a}{a^2+1};\frac{6a^2+2a}{a^2+1}\right)$ и (0; 0)

$$\begin{cases}\frac{2+6a}{a^2+1}=0,\\ \frac{6a^2+2a}{a^2+1}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-\frac{1}{3},\\ \frac{6a^2+2a}{a^2+1}=0\end{cases} \Leftrightarrow \quad a=-\frac{1}{3}.$$

Установим соответствие между значениями параметра a и множеством решений исходной системы, располагая множество решений системы над каждым подмножеством значений параметра. Для этого введём обозначение:

пара $\left(\frac{2-6a}{a^2+1};\frac{6a^2-2a}{a^2+1}\right)$ – (1), пара $\left(\frac{2+6a}{a^2+1};\frac{6a^2+2a}{a^2+1}\right)$ – (2),

пара (0; 0) – (3).



По результатам исследования, видим, что исходная система

при $a \le -3$ имеет ровно 2 различных решения,

при $-3 < a < -\dfrac{1}{3}$ имеет 3 различных решения,

при $a = -\dfrac{1}{3}$ имеет 2 различных решения, при $-\frac{1}{3}<a<0$ имеет 3 различных решения,

при $a=0$ имеет 2 различных решения,

при $0<a<\frac{1}{3}$ имеет 3 различных решения,

при $a=\frac{1}{3}$ имеет 2 различных решения,

при $\frac{1}{3}<a<3$ имеет 3 различных решения,

при $a\geq 3$ имеет 2 различных решения.

Таким образом, исходная система имеет ровно два различных решения тогда и только тогда, когда $a \in (-\infty; -3] \cup \left\{-\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}\right\} \cup [3; +\infty)$.

Ответ: $a \in (-\infty; -3] \cup \left\{-\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}\right\} \cup [3; +\infty)$.

Постройте график функции $y=\frac{5x-8}{5x^2-8x}$ и определите, при каких значениях *k* прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение

1) $y=\frac{5x-8}{5x^2-8x}$;

$$\frac{5x-8}{5x^2-8x}=\frac{\cancel{5x-8}}{x\cancel{(5x-8)}}=\frac{1}{x},\ \text{если } x\neq 0,\ x\neq\frac{8}{5}.$$

$$y=\frac{1}{x},\ \text{если } x\neq 0,\ x\neq 1,6.$$

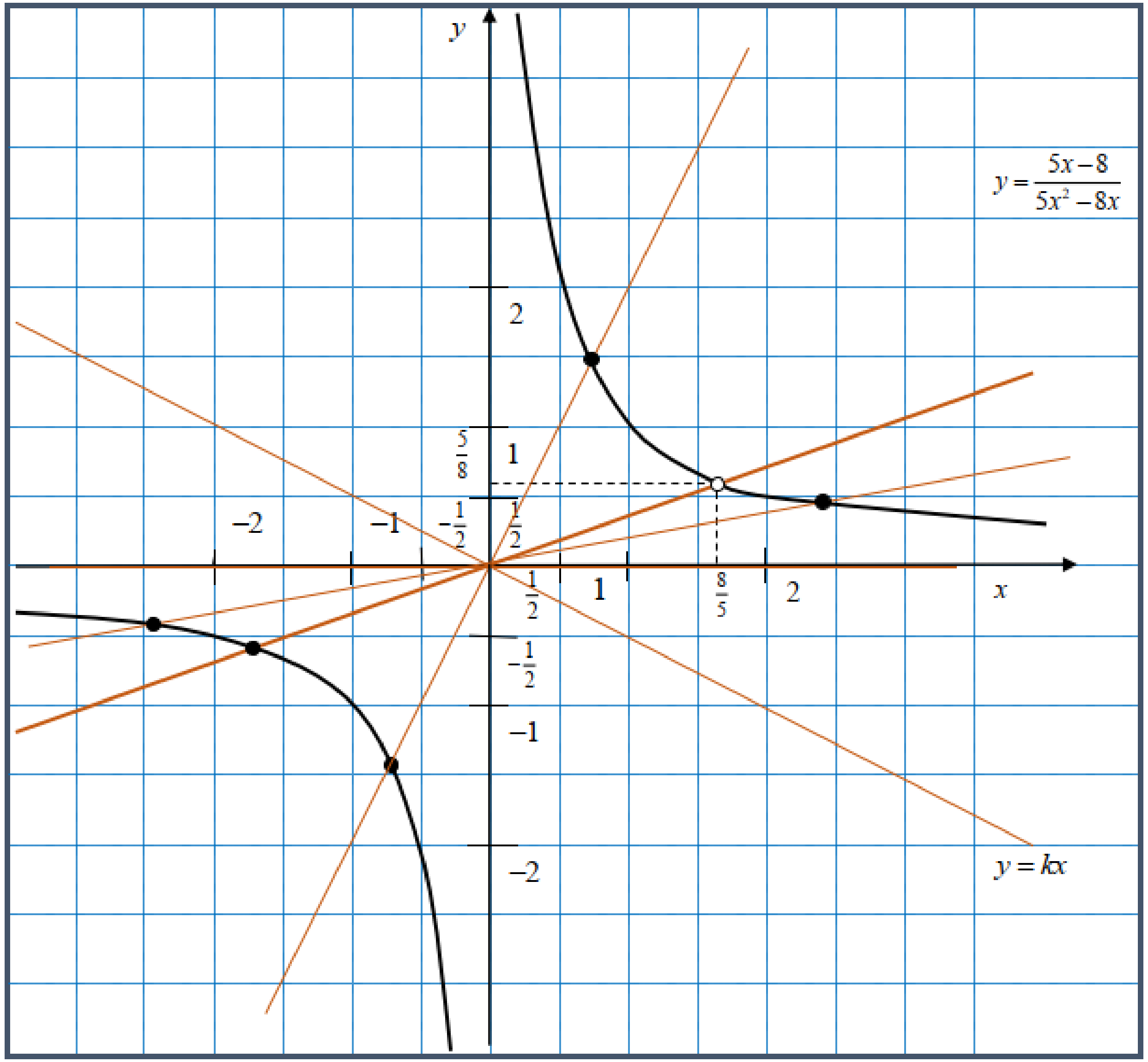
$y = \frac{1}{x}$. Функция обратной пропорциональности. Графиком является гипербола.

Так как $x \neq 1,6$, то точка $\left(\frac{8}{5}; \frac{5}{8}\right)$ не принадлежит графику функции.

Укажем координаты некоторых точек графика

x	-2	-1	$-0,5$	$0,5$	1	2
y	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$

2) Построим график функции $y=\dfrac{5x-8}{5x^2-8x}$



Прямая $y=kx$ проходит через начало координат.

Если $k \le 0$, то прямая $y=kx$ не имеет с графиком функции $y=\frac{5x-8}{5x^2-8x}$ общих точек;

если $k>0$, но прямая $y=kx$ не проходит через точку $\left(\frac{8}{5};\frac{5}{8}\right)$, то она имеет с графиком функции ровно две общие точки;

если прямая проходит через точку $\left(\frac{8}{5};\frac{5}{8}\right)$, то она имеет с графиком функции ровно одну общую точку. Тогда верно равенство $\frac{5}{8}=k\cdot\frac{8}{5}$. Отсюда $k=\frac{8}{5}:\frac{5}{8}=\frac{8}{5}\cdot\frac{8}{5}=\frac{64}{25}=2\frac{14}{25}=2{,}56$.

Следовательно, прямая $y = kx$ имеет с графиком функции $y = \frac{5x-8}{5x^2-8x}$ ровно одну общую точку тогда и только тогда, когда $k = 2,56$.

Ответ: прямая и график имеют ровно одну общую точку при $k = 2,56$.

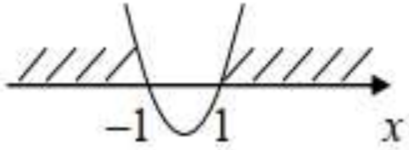
23. Постройте график функции $y=\frac{x-1}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}$. Найдите все значения *k*, при которых прямая $y=kx$ имеет с графиком функции ровно две общие точки.

Решение. $y=\frac{x-1}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}$.

1) Найдём область определения функции. Это совокупность всех значений *х*, удовлетворяющих неравенству $x^2-1>0$.

$$x^2-1=0 \;\Leftrightarrow\; x^2=1 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Схематично изобразим параболу $y=x^2-1$ и прочитаем схему.



$x^2-1>0$ при $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

$D(y)=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

2) Если $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, то

$$y = \frac{x-1}{x^2-1}, \qquad y = \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}, \qquad y = \frac{1}{x+1}.$$

Итак, $y = \frac{1}{x+1}$, если $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Графиком функции $y = \frac{1}{x+1}$ является гипербола.

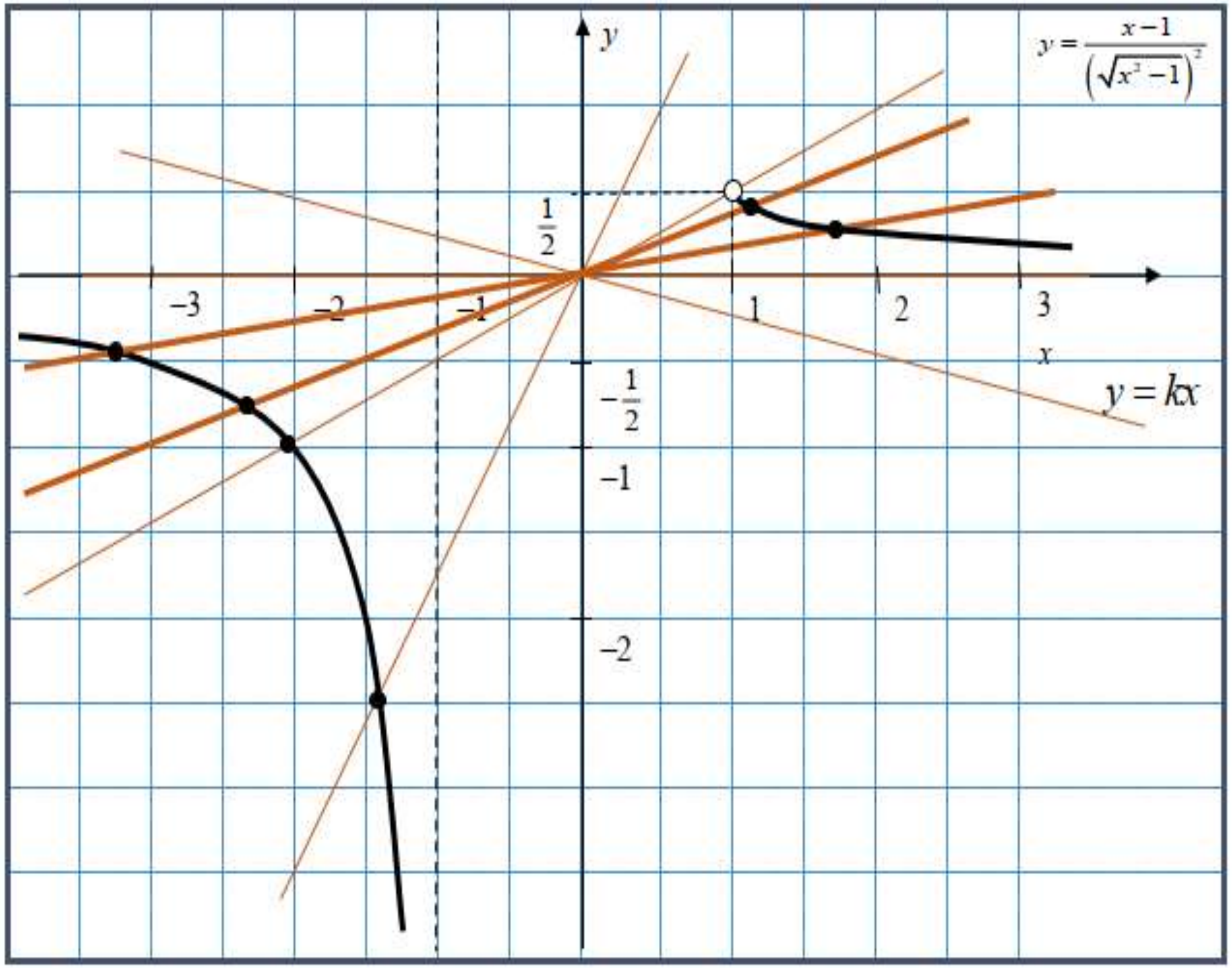
Укажем координаты некоторых её точек.

x	-3	-2	$-1{,}5$	2	3
y	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Выберем те части гиперболы, которые соответствуют условию $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Точка $\left(1; \frac{1}{2}\right)$ не принадлежит графику функции.

3) Построим график функции $y = \frac{x-1}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}$.



Прямая $y = kx$ проходит через начало координат.

Если прямая $y = kx$ проходит через точку $\left(1; \frac{1}{2}\right)$, то она имеет с графиком функции $y = \frac{x-1}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}$ ровно одну общую точку. В этом случае верно равенство $\frac{1}{2} = k \cdot 1$. Отсюда: $k = \frac{1}{2} = 0,5$.

Если $k \leq 0$, то прямая $y = kx$ не имеет общих точек с графиком функции $y = \frac{x-1}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}$;

если $0<k<0,5$, то прямая имеет с графиком функции ровно две общие точки;

если $k\geq 0,5$, то – ровно одну общую точку.

Следовательно, прямая $y=kx$ имеет с графиком исходной функции ровно две общие точки тогда и только тогда, когда $0<k<0,5$.

Ответ: прямая $y=kx$ имеет с графиком исходной функции ровно две общие точки, если $k\in(0;0,5)$.

Комментарий. Решение должно доказывать, что ДРУГИХ значений параметра, кроме тех, которые находим, НЕТ. Поэтому, действительно, нужно провести *полное* исследование и указать не только те значения, при которых выполняется условие задачи, но выполнить **ПОЛНЫЙ ПЕРЕБОР** значений параметра, подчёркивая при этом, сколько решений имеет система (уравнение) в каждом подмножестве значений параметра. Только в этом случае решение считается обоснованным.

Спасибо за внимание!

- **Панина Н. А.**