



# ОМО УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ СМОЛЕНСКОЙ ОБЛАСТИ



Подготовка к ЕГЭ по  
математике  
(профильный уровень)

29 января 2021 года



## «ШКОЛА УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ»

Методическое сопровождение  
изучения темы «Производная» в курсе алгебры и начал  
анализа общеобразовательной школы  
(опыт педагогов Смоленской области)

*Карамулина И. В., Харитонова Л.Г.,  
ОМО учителей математики Смоленской области*



# ОМО УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ СМОЛЕНСКОЙ ОБЛАСТИ



Круглый стол  
«Изучаем тему «Производная»»

22 – 25 января 2021 года



# МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «ПРОИЗВОДНАЯ» ОБУЧАЮЩИМИСЯ 10 – 11 КЛАССОВ

## ❖ Методика подготовки к ЕГЭ по теме «Производная»

Банькова Наталья Валерьевна,

Гелюх Наталья Михайловна,

*МБОУ "Средняя школа № 2" г. Велижа*

## ❖ Конспект урока «Экстремумы функций», 11 класс

Никитина Елена Анатольевна,

*МБОУ "Средняя школа № 3 им. Ленинского комсомола" г. Гагарина*

## ❖ Разработка уроков по теме «Производная» с использованием дифференцированного обучения

Евдокимова Ирина Сергеевна,

*МБОУ Хохловская СШ Смоленского района*

## ❖ Изучение темы «Производная и ее геометрический смысл»

Жмуркина Светлана Николаевна,

*МКОУ "Прудковская СОШ" Сафоновского района*

## ❖ Производная в ЕГЭ. Изучаем производную, систематизируем, обобщаем и применяем знания

Малышева Ирина Николаевна,

*МБОУ СОШ № 3 г. Вязьмы*



## ДИДАКТИЧЕСКАЯ БАЗА УЧИТЕЛЯ (ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «ПРОИЗВОДНАЯ»)

❖ Демонстрационный материал к урокам:  
урок по теме «Определение производной», уроки по теме  
«Исследование функций».

*Панина Нина Александровна,  
МБОУ "СШ № 33" г. Смоленска*

❖ Изучаем тему «Производная» по учебнику  
«Алгебра и начала математического анализа»  
(Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва,  
Н. Е. Фёдорова, М. И. Шабунин)

*Харитоновна Людмила Георгиевна,  
МБОУ Шимановская СОШ Вяземского района*



# ИЗУЧАЕМ ТЕМУ «ПРОИЗВОДНАЯ»

«Алгебра и начала математического анализа»  
(Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва,  
Н. Е. Фёдорова, М. И. Шабунин)

Харитоновна Людмила Георгиевна  
МБОУ Шимановская СОШ  
Вяземский район Смоленская область





## **СОДЕРЖАНИЕ**

- 1. Последовательность изучения темы «Функции» в курсе средней школы.**
- 2. Последовательность изучения темы «Элементы математического анализа» в курсе средней школы.**
- 3. Методические приемы для формирования осознанных навыков дифференцирования.**
- 4. Источники информации.**



# Методические приемы для формирования осознанных навыков дифференцирования

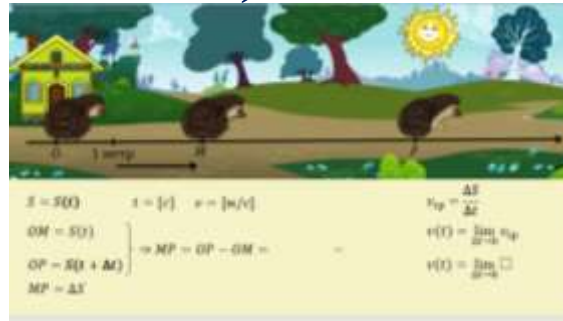
## I

- ▶ **Приступая к изучению производной целесообразно:**
- ▶ 1) повторить все вопросы, связанные с линейными и элементарными функциями, т.к. основная идея дифференциального исчисления - это представление функции как о линейной в достаточно малой окрестности некоторой точки;
- ▶ 2) отработать такие понятия, как приращение функции и аргумента, выработать твердые навыки их нахождения;
- ▶ 3) выяснить геометрический смысл отношения приращения функции к приращению аргумента, ввести понятие касательной к кривой как предельное положение секущей.



## II

- ▶ **Классически удачным способом** введения понятия производной является решение подводящих задач о нахождении мгновенной скорости прямолинейного движения (**можно использовать видеоролик, перейдя по ссылке**) →



- ▶ Главная цель на этом этапе - показать обучающимся целесообразность изучения этой темы.

## III

- ▶ **Особое внимание необходимо уделить сложной функции** и ее производной, т.к. наибольшее количество ошибок связано именно с ней.

## IV

▶ **Вступительная беседа к геометрическому смыслу производной** может иметь следующую идею:

1. Показать, что функции, графиками которых являются кривые, описывают многие важные физические и технические процессы;
2. По сравнению с прямой кривые постоянно меняют наклон: возрастание - на убывание и наоборот;
3. Могут существовать значения  $y$ , которым соответствует несколько значений  $x$ .

## V

▶ **Этапы изучения геометрического смысла:**

1. Определение углового коэффициента прямой, угла наклона между положительным направлением оси  $Ox$  и прямой, свойства функции и графика в зависимости от коэффициента.
2. Определение касательной к графику дифференцируемой функции.
3. Геометрический смысл производной.
4. Уравнение касательной к графику дифференцируемой функции.

## VI

- **Теоретический материал по исследованию функции** с помощью производной может быть введен следующим образом:
1. Сформулировать все утверждения, оставить без доказательств.
  2. Показать схему доказательства теорем.
  3. Формулу Лагранжа дать без доказательства, а остальные теоремы - доказать на ее основе.

## VII

► **Основные этапы исследования функции:**

1. Область определения функции.
2. Нахождение производной.
3. Нахождение стационарных точек.
4. Промежутки монотонности.
5. Точки экстремума.
6. Построение графика функции.

## VIII

- Одним из трудных вопросов является решение задач на **наибольшее и наименьшее значение (задачи на оптимизацию)**, связаны с построением и исследованием некоторой модели. Трудности возникают при составлении функции на основе условия задачи. Здесь требуется грамотный анализ условия, опора на полученный при работе с сюжетными (текстовыми) задачами опыт поиска решения **(можно использовать видеоролик, перейдя по ссылке) →**



**Задачи на оптимизацию**

$P = 20 = 2(a + b) \Rightarrow b = (10 - a)$   
 $S = a \cdot b$

$a$  – аргумент,  $S$  – функция  
 $a \in (0; 10)$

$S' = (10a - a^2)' = 10 - 2a$   
 $S' = 0 \Leftrightarrow a = 5 \in (0; 10)$

$S = 5 \cdot 5 = 25 \text{ (м}^2\text{)}$  **ответ на вопрос задачи**

составление математической модели      работа с математической моделью      ответ на вопрос задачи



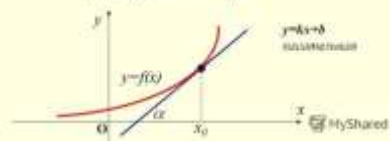
# ПАМЯТКИ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ТЕМЕ «ПРОИЗВОДНАЯ»

## ❖ «Памятки»

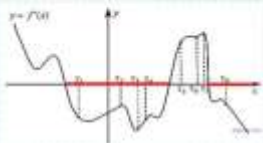
*Панина Нина Александровна,  
МБОУ "СШ № 33" г. Смоленска*

### Геометрический смысл производной

Значение производной функции  $y=f(x)$  в точке  $x=x_0$  равно угловому коэффициенту касательной к графику функции  $y=f(x)$  в точке  $x=x_0$ , т.е.  
 $f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha$



На рисунке изображён график  $y=f'(x)$  производной функции  $f(x)$  и восемь точек на оси абсцисс. В скольких из этих точек функция  $f(x)$  убывает?

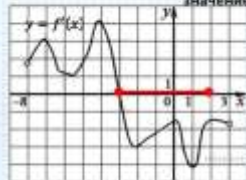


Функция убывает на промежутках, где производная отрицательна.

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$$

Ответ: 5.

На рисунке изображён график производной функции, определённой на интервале  $[-8; 3]$ . В какой точке отрезка  $[-3; 2]$  функция принимает наибольшее значение?

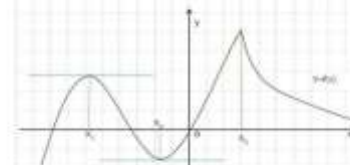


Производная функции отрицательна, поэтому функция на этом отрезке убывает.

Поэтому наибольшее значение функции достигается на левой границе отрезка, т.е. в точке  $-3$ .

Ответ:  $-3$ .

**Теорема.** Если функция  $y=f(x)$  имеет экстремум в точке  $x=x_0$ , то в этой точке производная функции либо равна нулю, либо не существует.



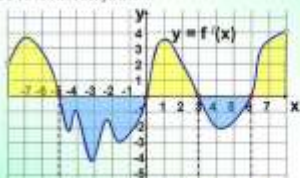
Особые точки:

$x_0, x_1$  – стационарные точки,  
 $x_2$  – критическая точка

$x_0, x_1$  – точки максимумов,  
 $x_2$  – точка экстремума

По этой схеме мы можем дать ответы на многие вопросы тестов.

Исследуйте функцию  $y=f(x)$  на экстремум и укажите количество ее точек минимума.



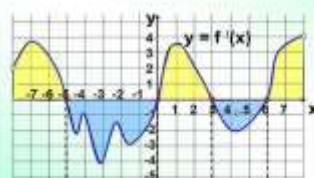
4 точки экстремума,

Ответ: 2 точки минимума



### Задача 2.4

Найдите промежутки возрастания функции  $y=f(x)$ .



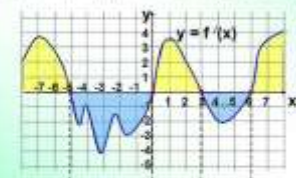
В точках  $-5, 0, 3$  и  $6$  функция непрерывна, поэтому при записи промежутков возрастания эти точки включаем.

Ответ:  $[-8; -5], [0; 3], [6; 8]$



### Задача 2.5

Найдите промежутки возрастания функции  $y=f(x)$ . В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.




В точках  $-5, 0, 3$  и  $6$  функция непрерывна, поэтому при записи промежутков возрастания эти точки включаем.

$[-8; -5], [0; 3], [6; 8]$

Сложим целые числа:  $-7, -6, -5, 0, 1, 2, 3, 6, 7$

Ответ: 1





# НЕСТАНДАРТНЫЕ ПОДХОДЫ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ОСОЗНАННЫХ НАВЫКОВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

## ❖ «Формирование навыков дифференцирования»

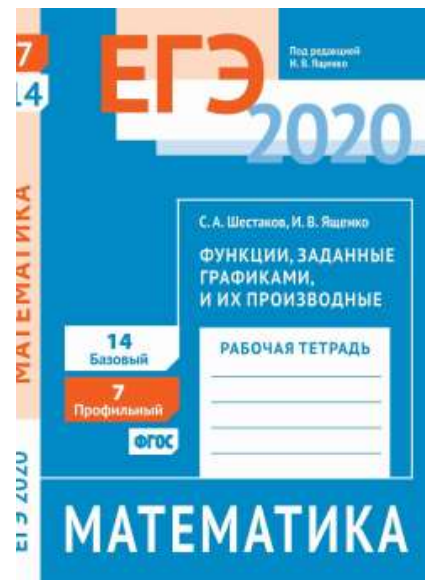
*Панина Нина Александровна,  
МБОУ "СШ № 33" г. Смоленска*

*Работаю по учебно-методическому комплексу Мордковича А. Г. Тему «Производная» мои обучающиеся изучают в 10-м классе в конце второго полугодия. Начинаю с того, что актуализирую наглядные представления по теме «Функция» и расширяю их: создаю первичные представления о показательной функции и логарифмической функции (2 урока). Как? На первом уроке создаю предпосылки для внутренней мотивации обучающихся, нацеливая их на перспективу: глубокое понимание нового (для обучающихся) действия – дифференцирование функций, которое будем осваивать в ближайшее время; сообщая, что объектами действия будут функции, и поэтому важно привести представления о функциях в систему (3 минуты); перехожу к актуализации представлений об элементарных функциях...*

# СИСТЕМА УПРАЖНЕНИЙ ДЛЯ ЧТЕНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ, ИСХОДЯ ИЗ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО СМЫСЛА ПРОИЗВОДНОЙ И ДЛЯ ЧТЕНИЯ ГРАФИКОВ ПРОИЗВОДНОЙ

## ❖ «Система упражнений»

*Ипатова Ирина Николаевна,  
МБОУ Гимназия г. Сафоново*



# ДИСКУССИОННАЯ ПЛОЩАДКА

*... Важным считаю начать изучение темы с исторических сведений. Для себя выделила такой план:*

*Исторические сведения по теме «Производная»*

- 1. Развитие и возникновение понятия производной*
- 2. Примеры, приводящие к понятию производной*
- 3. И. Ньютон и его дифференциальное исчисление*
- 4. Роль Лейбница в создании дифференциального исчисления*

*... Производная очень важна в физике*

*...Поэтому с учителем физики мы ежегодно проводим интегрированный урок "Производная в физике и технике".*

*Цель урока: показать межпредметную связь на примере математического моделирования. Формы уроков различны: практикумы, конференции.*





## ДИСКУССИОННАЯ ПЛОЩАДКА

... Изучение темы «Производная» – актуальная и волнующая тема для каждого учителя математики. Познакомившись с материалом по теме «Производная» в учебниках под редакциями А.Г. Мордковича, С.М. Никольского, А.Ш. Алимова, А.Н. Колмогорова, можно заметить, что основные принципы изучения этой темы схожи. Они представляют собой стандартный набор сведений о производной: её понятие, геометрический смысл, таблица производных, правила дифференцирования. Имеются различия в приложении по теме. К сожалению, немаловажная и интересная информация об истории возникновения и развития производной отсутствует. Устранить такое недоразумение в силах любого учителя математики. На уроке или внеурочных занятиях можно привести следующий материал: практические задачи на нахождение кратчайшего пути (одни из важных предпосылок появления дифференциального исчисления). Первые задачи на нахождение максимума и минимума (экстремумов) функции были поставлены в V веке до н.э. Решением этих задач занимались Евклид, Архимед, Кеплер, Герон, Ферма. Однако общих способов не было разработано, каждая задача имела индивидуальное решение. В XVII веке Ньютоном и Лейбницем были разработаны общие методы решения задач на экстремум (максимум и минимум). Развёрнутый материал об этих и других открытиях могут подготовить сами учащиеся и выступить с ним перед классом...

# ДИСКУССИОННАЯ ПЛОЩАДКА



*... Все мы понимаем, сколько времени требуется на отыскание материалов для подготовки старшеклассников к ЕГЭ. Поэтому я крайне благодарна всем, кто делится и своими наработками, и опытом, и собранным материалом. Всё это помогает развивать творческую и мыслительную деятельность ребят, умение работать с информацией и т.д. Особенно ценно то, что все материалы помогают в систематизации знаний учащихся. Вряд ли когда-нибудь будет создан идеальный универсальный учебник. Человечество всегда в поиске, и мы не остановимся на достигнутом, будем искать, будем пробовать, будем экспериментировать, будем развиваться сами и стремиться развивать наших учеников.*

*Спасибо всем участникам круглого стола. Вы провели огромную работу! А , главное, были щедры ко всем нам. Пусть Ваш труд будет вознаграждён благодарностью Ваших учеников!*



**«ШКОЛА УЧИТЕЛЯ  
МАТЕМАТИКИ»**

*«Учитель до тех пор остается учителем пока учится сам, как только он перестает учиться - в нем умирает учитель»*

**К.Д. Ушинский**

# ПОДГОТОВКА К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ (ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ)

- **Приемы и способы решения заданий №7 ЕГЭ по математике профильного уровня**

*Банькова Наталья Валерьевна,  
учитель математики МБОУ «Велижская СШ № 2»,  
руководитель РМО учителей математики Велижского района,  
член бюро ОМО учителей математики Смоленской области*

- **Приемы и способы решения заданий № 12 ЕГЭ по математике профильного уровня**

*Панина Нина Александровна,  
учитель математики МБОУ «СШ № 33» г. Смоленска,  
председатель предметной комиссии по проверке выполнения заданий ЕГЭ*