МБОУ «Средняя школа №2» города Велижа

Приемы и способы решения заданий №7 ЕГЭ по математике профильного уровня

(опыт работы педагогов школы)

Банькова Наталья Валерьевна,

учитель математики и информатики, руководитель РМО учителей математики Велижского района, член бюро ОМО учителей математики Смоленской области

Велиж

2021

Задача – 7. Производная и первообразная

- Спецификация КИМ ЕГЭ 2021г.

Приложение 1

Обобщенный план варианта КИМ ЕГЭ 2021 года
по МАТЕМАТИКЕ (профильный уровень)

Уровни сложности заданий: Б – базовый; П – повышенный; В – высокий.

№	Проверяемые требования (умения)	Коды проверяемых требований к уровню подготовки (по кодификатору)	Коды проверяемых элементов содержания (по кодификатору)	Уровень сложности задания	Максимальный балл за выполнение задания	Примерное время выполнения задания выпускником, изучавшим математику на базовом уровне, в минутах	Примерное время выполнения задания выпускником, изучавшим математику на профильном уровне, в минутах
7.	Уметь выполнять действия с функциями	3.1-3.3	4.1-4.3	Б	1	10	5

- Кодификатор требований к уровню подготовки, ЕГЭ-2021

3		**Уметь выполнять действия с функциями**
	3.1	Определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции; описывать по графику поведение и свойства функции, находить по графику функции наибольшее и наименьшее значения; строить графики изученных функций
	3.2	Вычислять производные и первообразные элементарных функций
	3.3	Исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшее и наименьшее значения функции

- Кодификатор элементов содержания, ЕГЭ-2021

4		**Начала математического анализа**
4.1		*Производная*
	4.1.1	Понятие о производной функции, геометрический смысл производной
	4.1.2	Физический смысл производной, нахождение скорости для процесса, заданного формулой или графиком
	4.1.3	Уравнение касательной к графику функции
	4.1.4	Производные суммы, разности, произведения, частного
	4.1.5	Производные основных элементарных функций
	4.1.6	Вторая производная и её физический смысл
4.2		*Исследование функций*
	4.2.1	Применение производной к исследованию функций и построению графиков
	4.2.2	Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических, задачах
4.3		*Первообразная и интеграл*
	4.3.1	Первообразные элементарных функций
	4.3.2	Примеры применения интеграла в физике и геометрии

Задача – 7. Производная и первообразная

7.1. Применение производной к исследованию функции

7.2. Геометрический смысл производной, касательные

7.3. Физический смысл производной

7.4. Первообразные и интегралы

7.1. Применение производной к исследованию функции

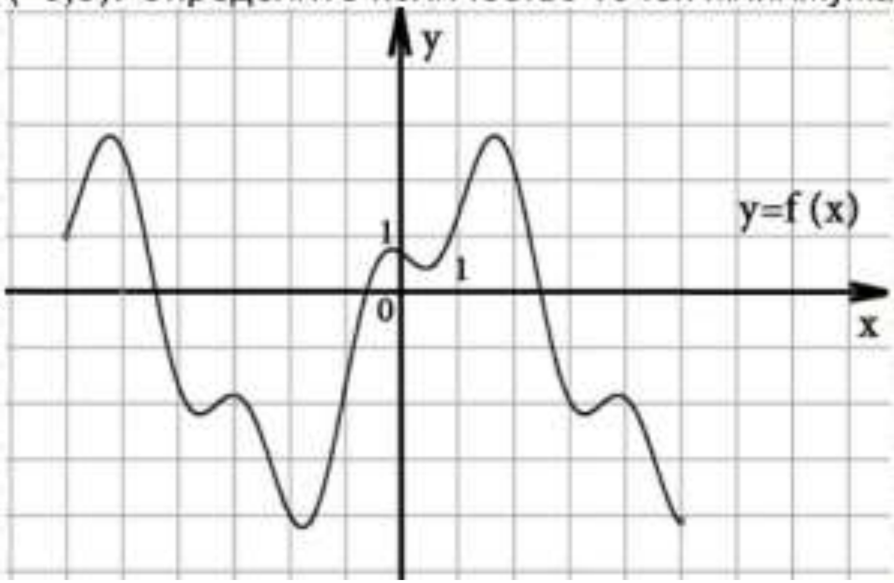
по графику функции

по графику производной функции

- Нахождение точек экстремума.
- Нахождение длины промежутка возрастания или убывания функции.
- Определение количества целых точек, в которых производная функции отрицательна, положительна.
- Нахождение количества точек, в которых производная функции $y = f(x)$ равна 0.

Проблема!

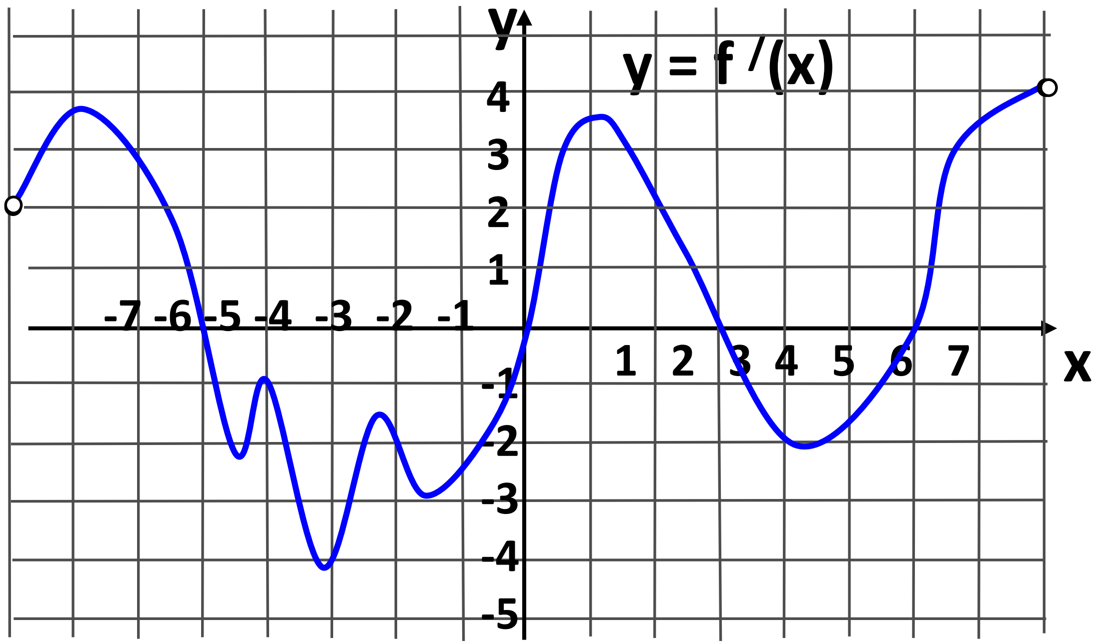
На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6;5)$. Определите количество точек минимума на интервале $(-1;4)$.



! В КИМах на экзамене можно писать, проводить линии…

Задача

На рисунке изображен график производной функции *y =f(x)*, заданной на промежутке (- 8; 8)

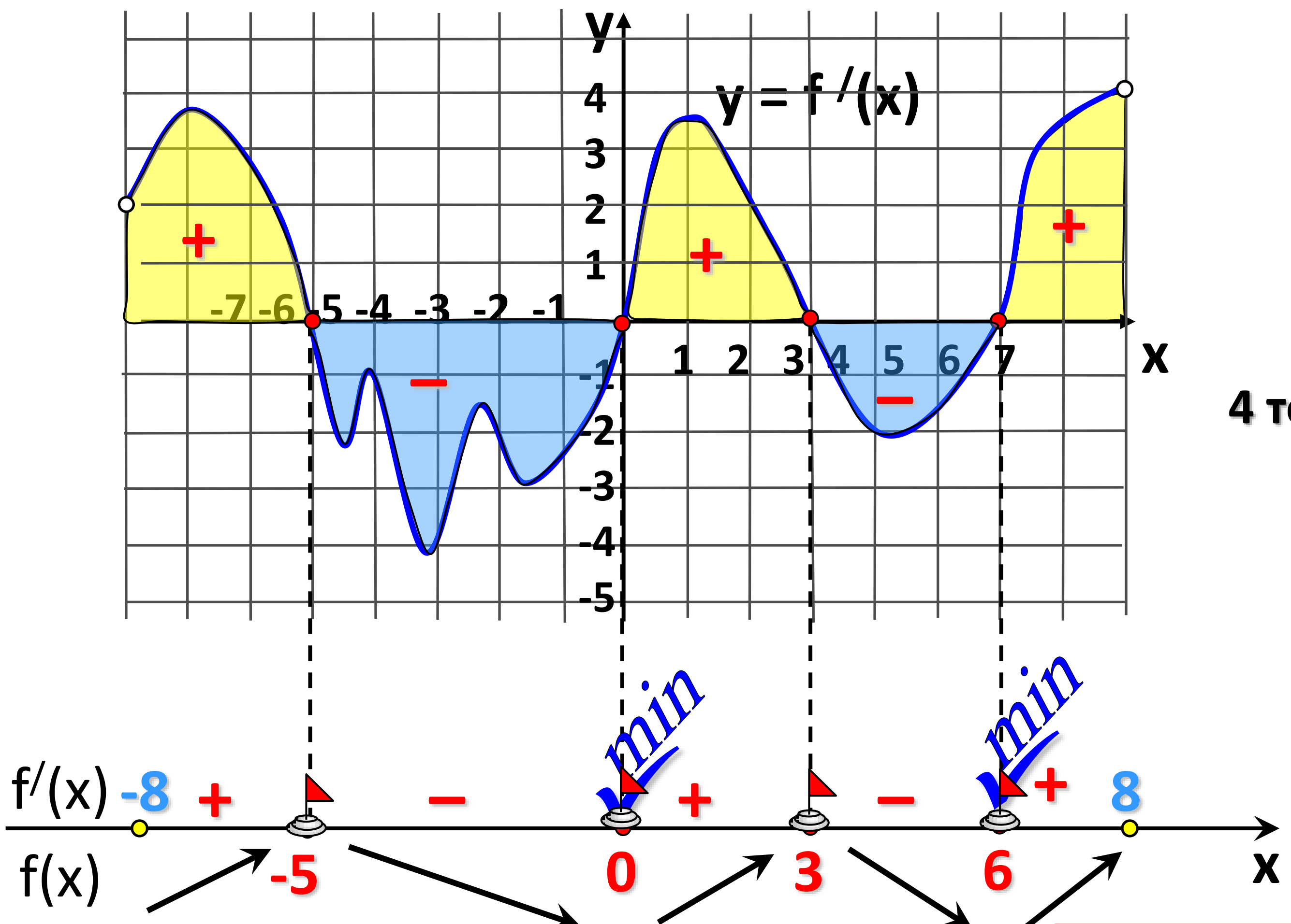


Найдем точки, в которых
f /(x)=0
(это нули функции).

Исследуем свойства графика и мы можем ответить на множество вопросов о свойствах функции, хотя графика самой функции не представлено!

По этой схеме мы можем дать ответы на многие вопросы!!!

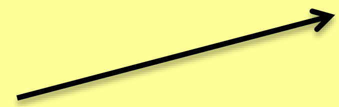
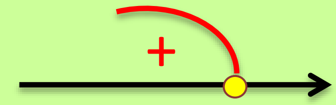
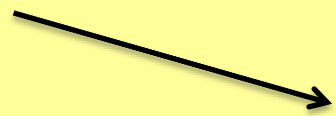
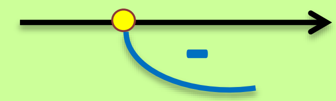
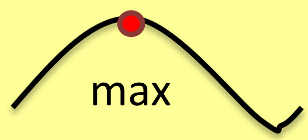
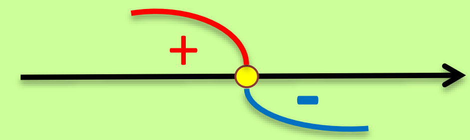
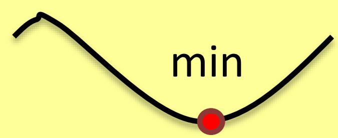
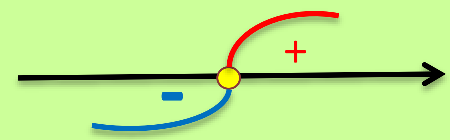
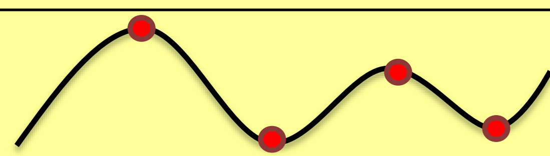
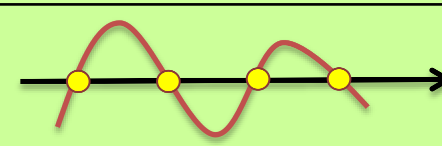
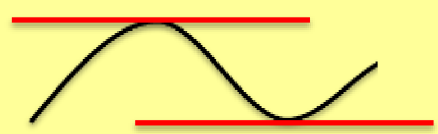
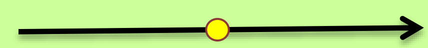
1. Исследуйте функцию y =f (x) на экстремум и укажите количество ее точек минимума.



4 точки экстремума

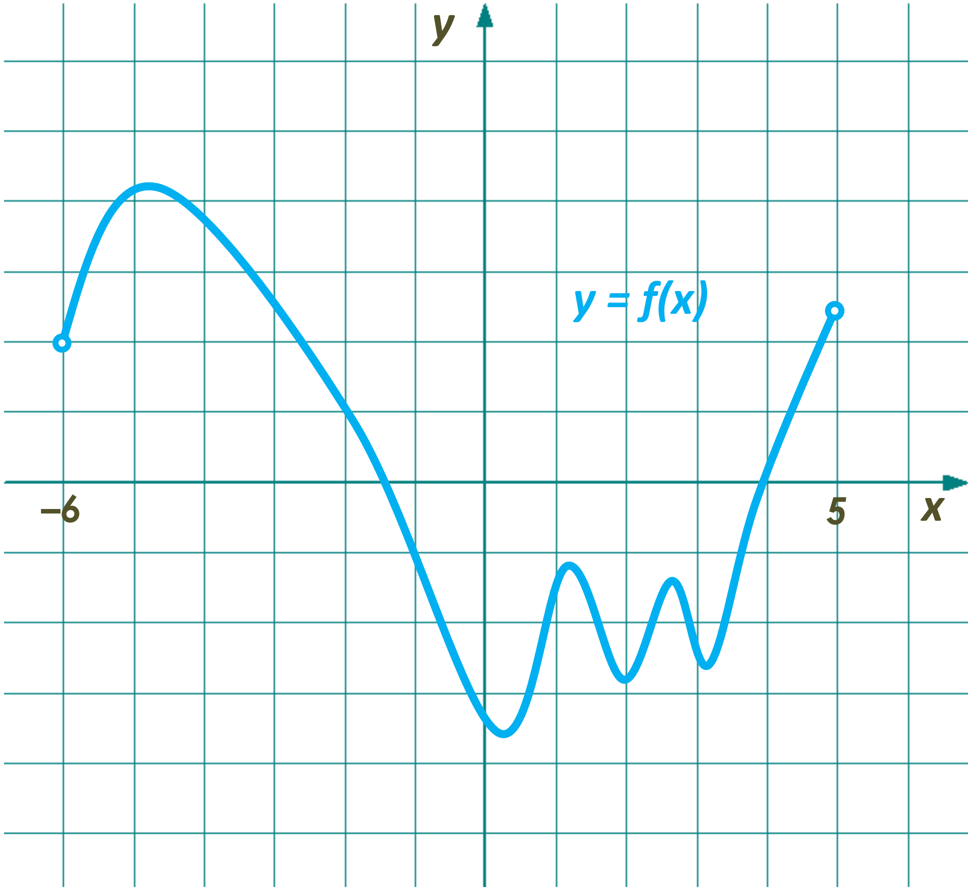
В 7	2					

Применение производной

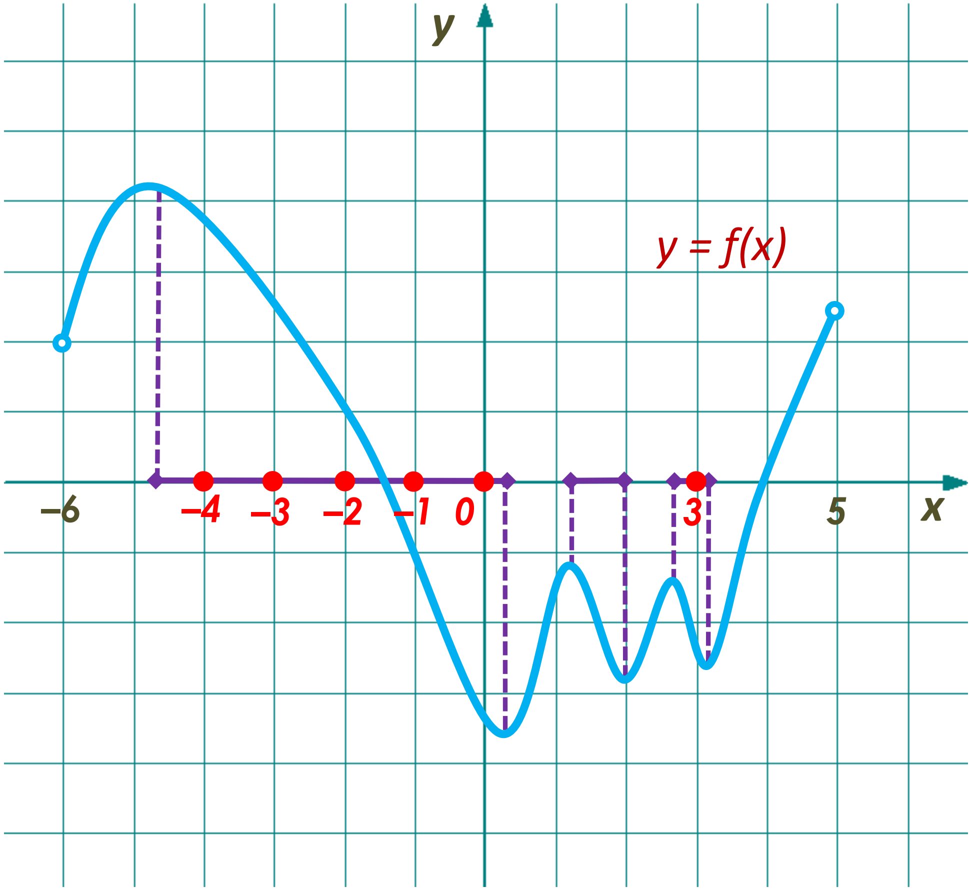
Ситуация	Функция f(x)	Производная f´(x)
Возрастание функции		> 0 
Убывание функции		< 0 
Максимум функции		
Минимум функции		
Экстремумы функции		= 0 
Касательная параллельна прямой *y=a*		= 0 

Тип 7.1.1

На рисунке изображен график функции *y=f(x)*, определенной на интервале (–6; 5). Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.



Тип 7.1.1 На рисунке изображен график функции *y=f(x)*, определенной на интервале (–6; 5). Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.



Решение:

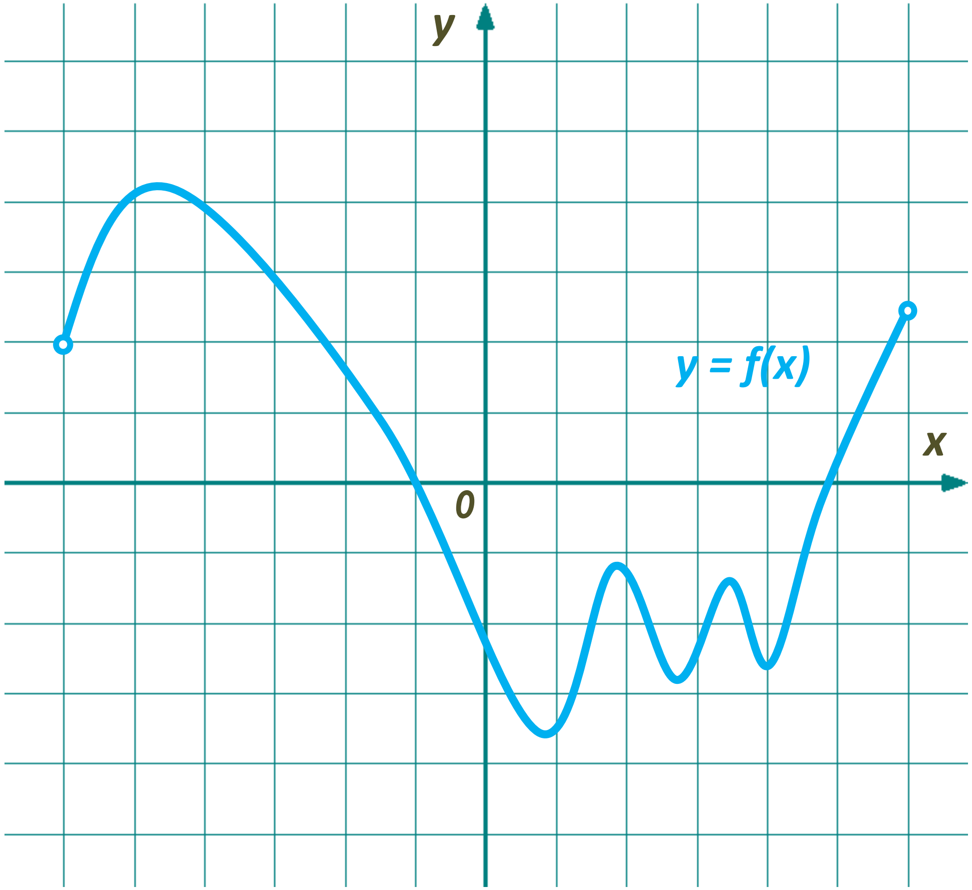
f′(x)<0 если f(x) убывает,

а значит, необходимо найти количество целых точек, входящих в промежутки убывания функции.

В 7 | 6

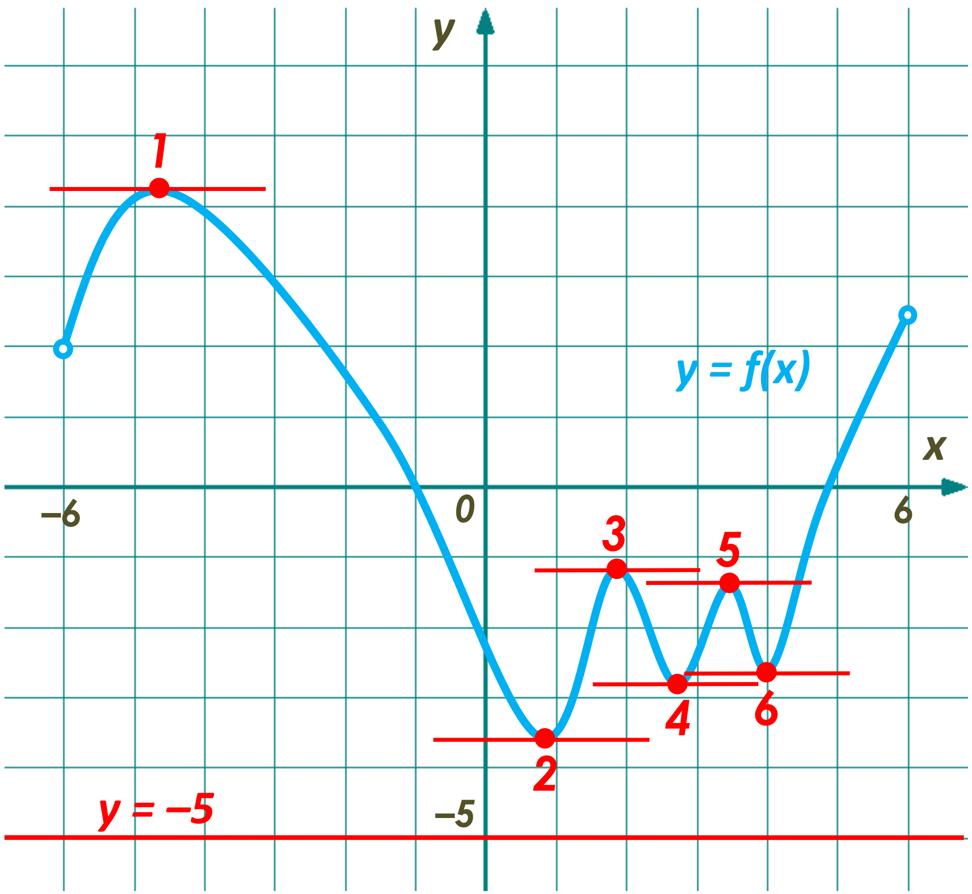
Тип 7.1.2

На рисунке изображен график функции *y=f(x)*, определенной на интервале (–6; 6). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой y= –5.



Тип 7.1.2

На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале (–6; 6). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y=-5$.



Решение:

$$y = kx+b$$

$y=-5$ прямая, параллельная оси OX.

Значит, если касательная к графику функции параллельна этой прямой, то она тоже горизонтальная.

Следовательно, угловой коэффициент в искомых точках

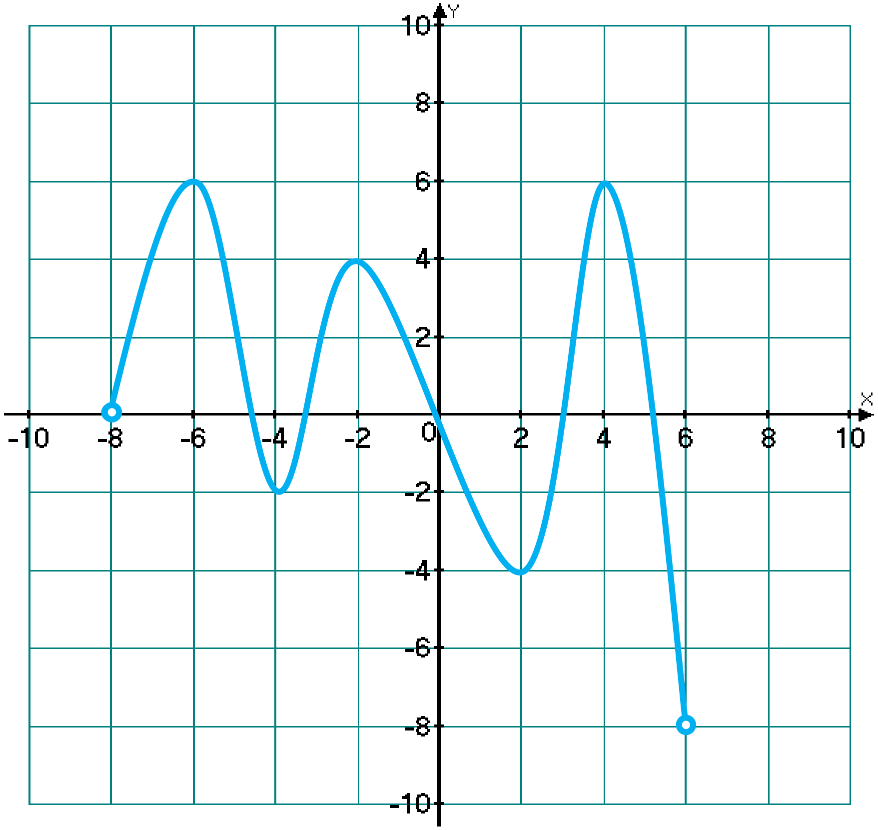
$$k = f'(x) = 0$$

Это точки экстремума.

В 7	6					

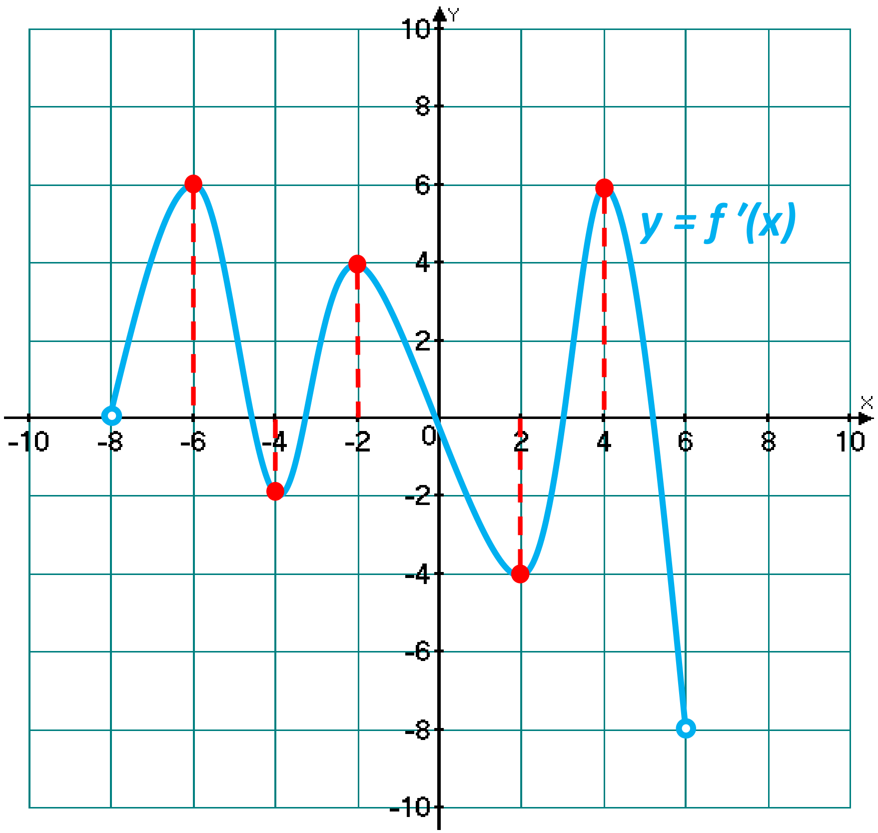
Тип 7.1.3

На рисунке изображен график функции *y=f(x),* определенной на интервале (–8; 6). Найдите сумму точек экстремума функции *f(x).*



Тип 7.1.3

На рисунке изображен график функции *y=f(x)*, определенной на интервале (–8; 6). Найдите сумму точек экстремума функции *f(x)*.



Решение:

Точки экстремума – это точки минимума и максимума.

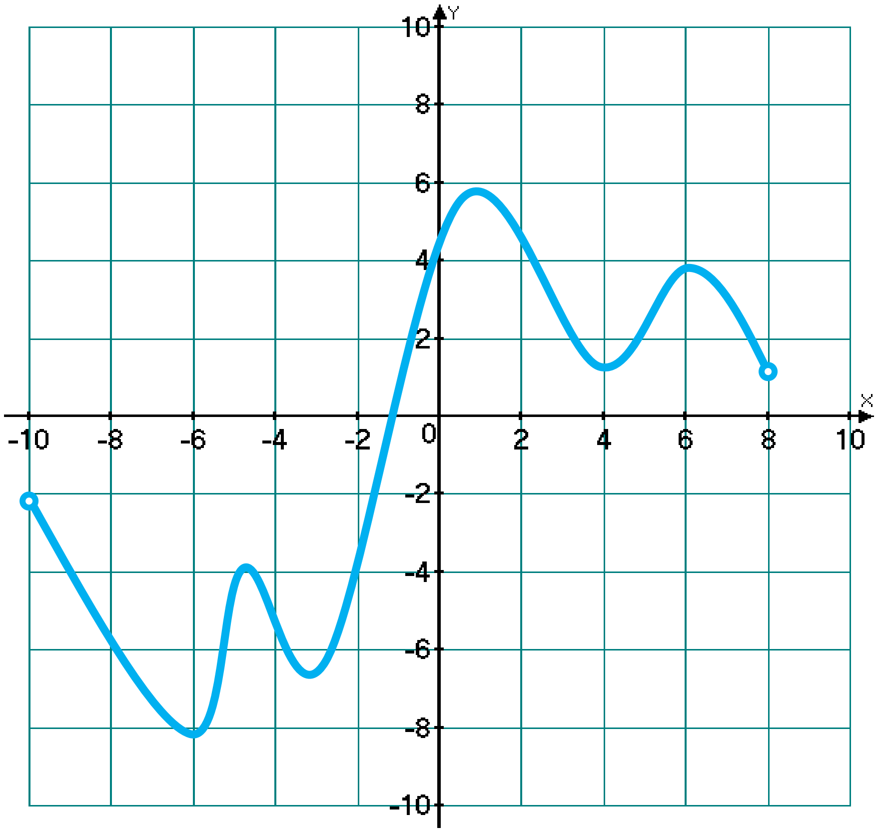
Найдем сумму их абсцисс:

-6 + (-4) + (-2) + 2 + 4=

В 7	–	6				

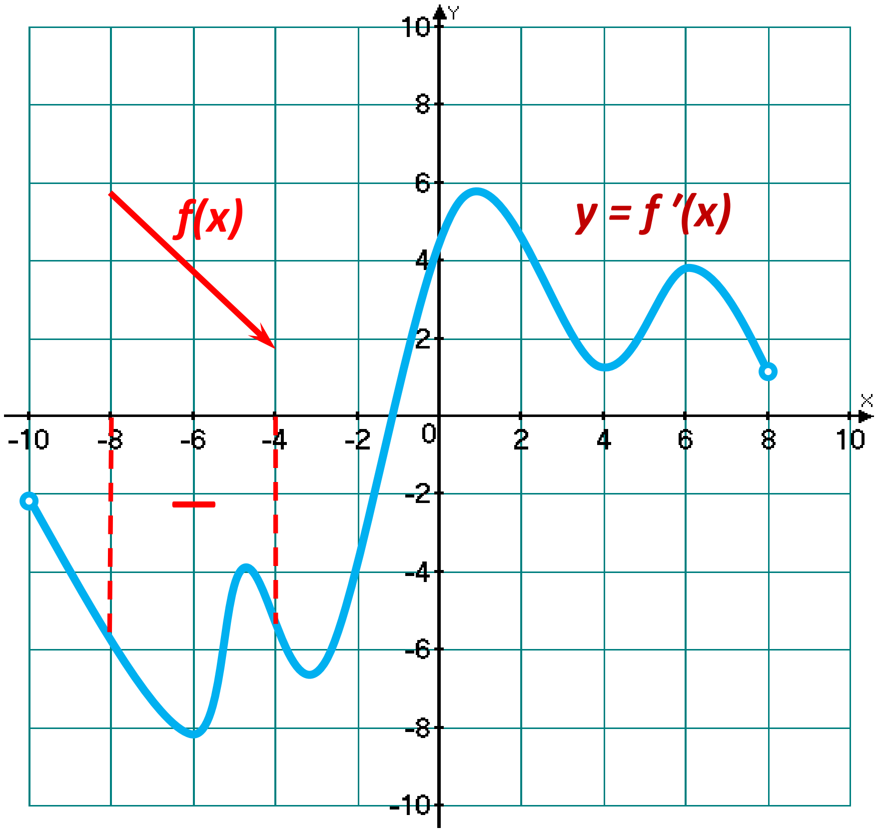
Тип 7.1.4

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале (–10; 8). В какой точке отрезка [–8; –4] функция $f(x)$ принимает наименьшее значение.



Тип 7.1.4

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале (–10; 8). В какой точке отрезка [–8; –4] функция $f(x)$ принимает наименьшее значение.



Решение:

на отрезке [–8; –4]

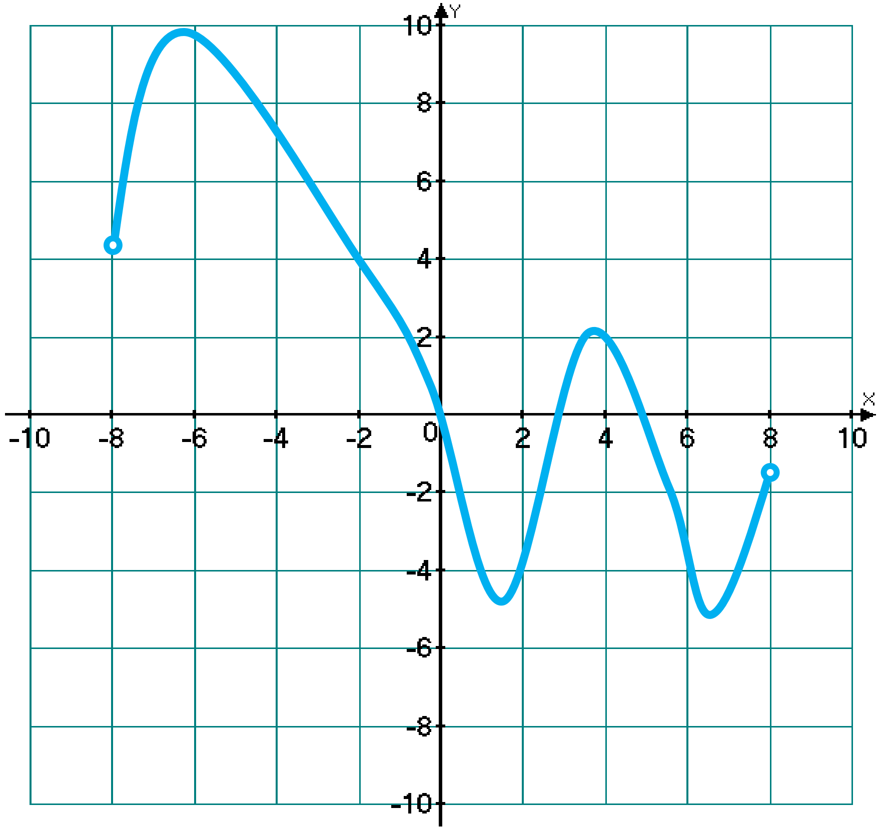
$f'(x)<0$, значит f(x) убывает,

Значит, наименьшее значение на этом отрезке она принимает на правом конце отрезка, то есть в точке –4.

В 7	–	4				

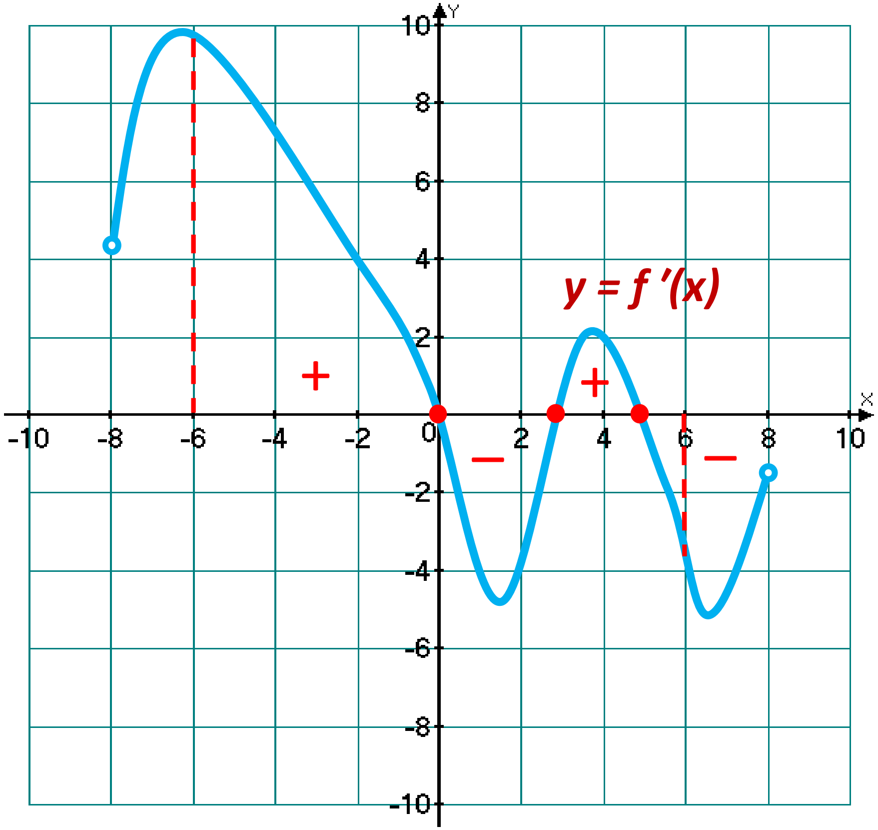
Тип 7.1.5

На рисунке изображен график *y = f ′(x)* – производной функции *f(x)*, определенной на интервале (–8; 8). Найдите количество точек экстремума функции *f(x)*, принадлежащих отрезку [– 6; 6].



Тип 7.1.5

На рисунке изображен график *y = f ′(x)* – производной функции *f(x)*, определенной на интервале (–8; 8). Найдите количество точек экстремума функции *f(x)*, принадлежащих отрезку [– 6; 6].



Решение:

В точке экстремума

$f'(x)=0$ либо не существует.

Видно, что таких точек принадлежащих отрезку [–6; 6] три. При этом в каждой точке производная меняет знак либо с «+» на «–», либо с «–» на «+».

В 7 | 3

7.2. Геометрический смысл производной, касательные

- Нахождение значения производной в заданной точке, если задан график функции и касательная к нему.

Геометрический смысл производной

$$k = f'(x_0) = tg\alpha$$

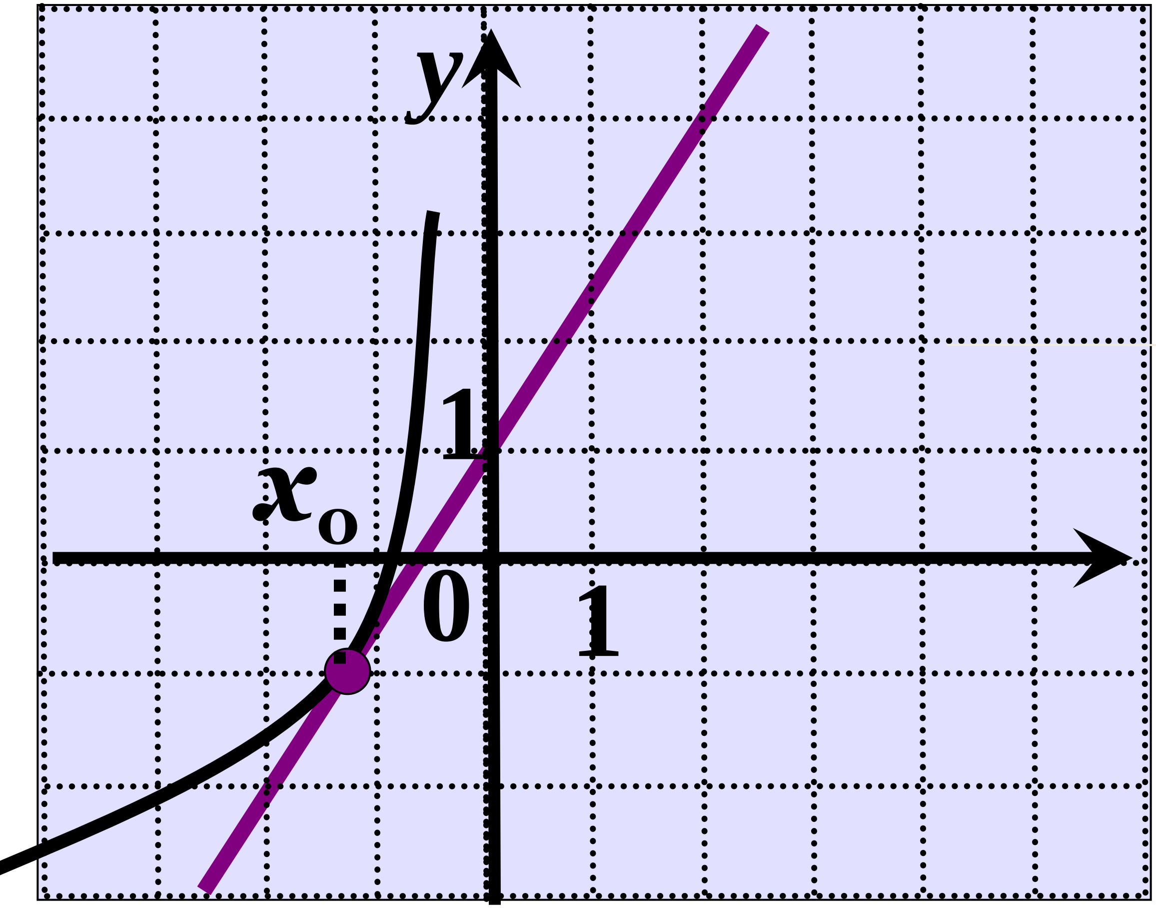
угловой коэффициент касательной

значение производной в точке X_0

тангенс угла наклона касательной к положительному направлению оси ОХ

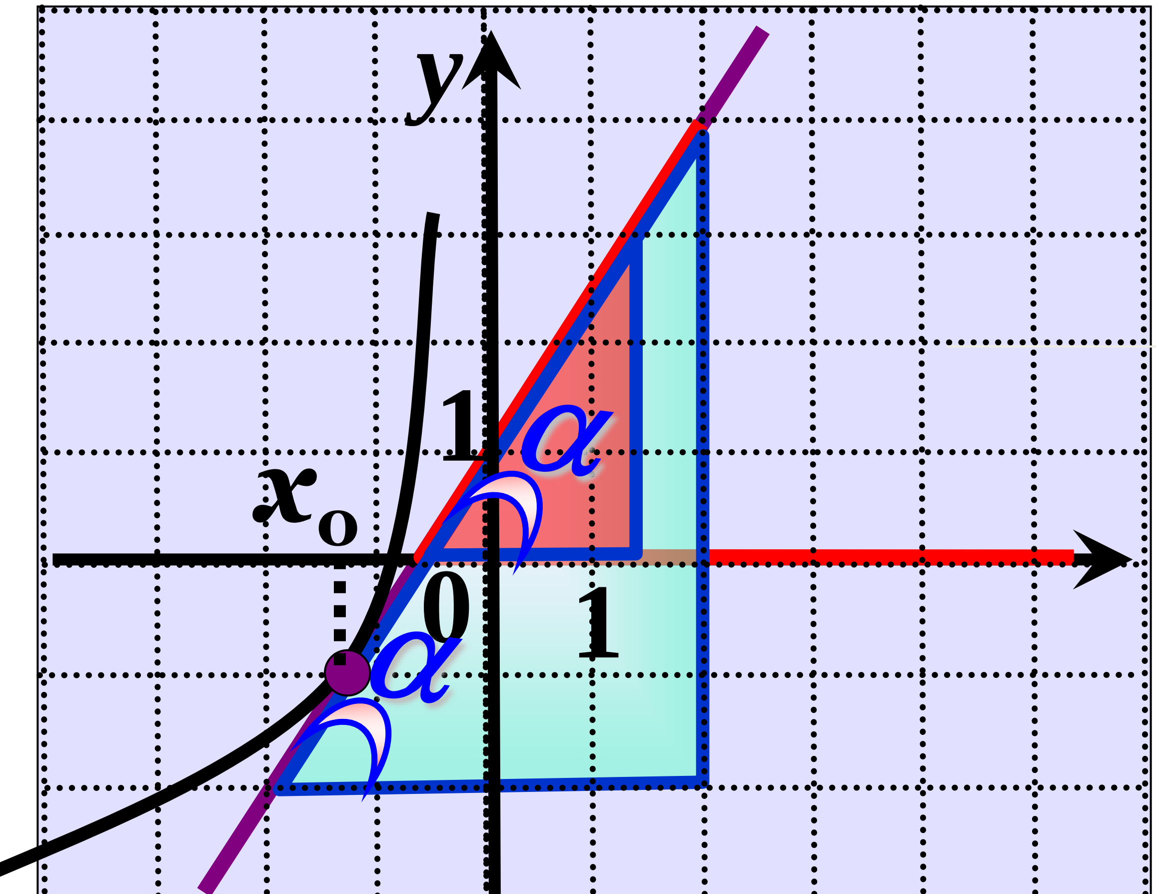
Тип 7.2.1

На рисунке изображен график функции y=f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной в точке x_0.



Тип 7.2.1

На рисунке изображен график функции y=f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной в точке x_0.



α**- острый**

$tg\ \alpha > 0\ \ f'(x_0) > 0$

Найдем тангенс этого угла. Для этого подберем треугольник с катетами – целыми числами. Этот треугольник не подходит.

$tg\ \alpha = 6/4 =$

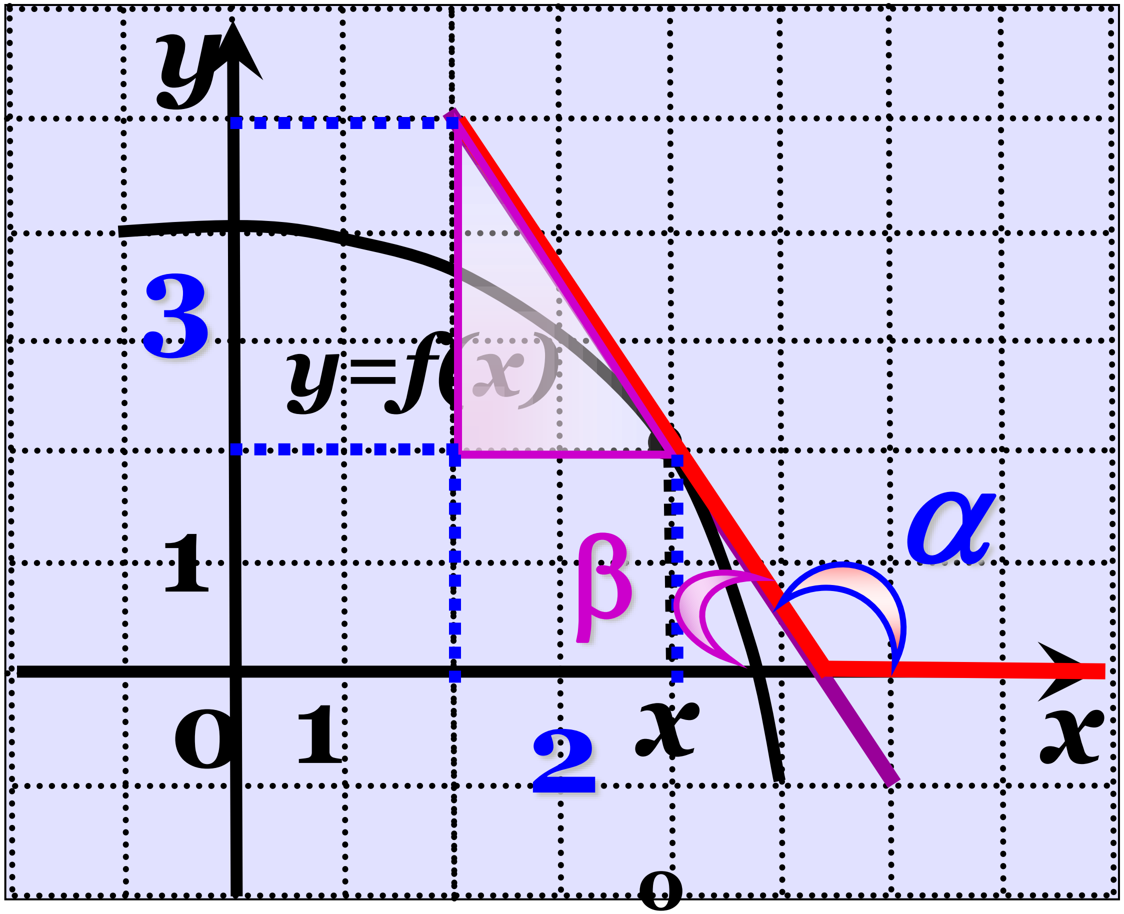
$= 1{,}5 = f'(x_0)$

Можно найти несколько удобных треугольников, например,….

В 7	1	,	5			

Тип 7.2.2

1.2. На рисунке изображен график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной в точке x_0.



α- тупой

$tg\alpha < 0 \quad f'(x_0) < 0$

$tg\ \alpha = -\ tg\ \beta$

$tg\ \alpha = -\ 3/2 =$

$= -\ 1{,}5 = f'(x_0)$

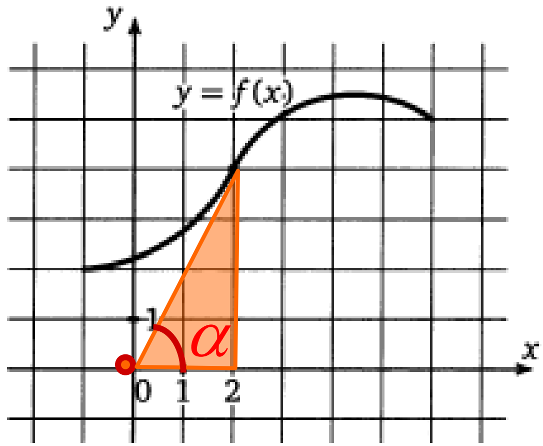
В 7	–	1	,	5		

Реши сам!

На рисунке изображен график функции *y = f (x)*, касательная к этому графику, проведенная в точке x_0, проходит через начало координат. Найдите $f'(x_0)$.

1

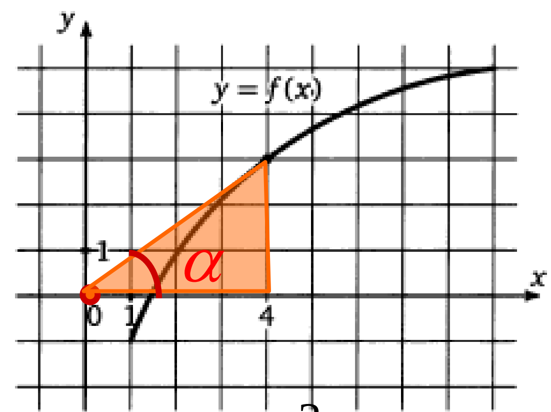
$x_0 = 2$



$$f'(x_0) = tg\alpha = \frac{4}{2} = 2$$

2

$x_0 = 4$



$$f'(x_0) = tg\alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

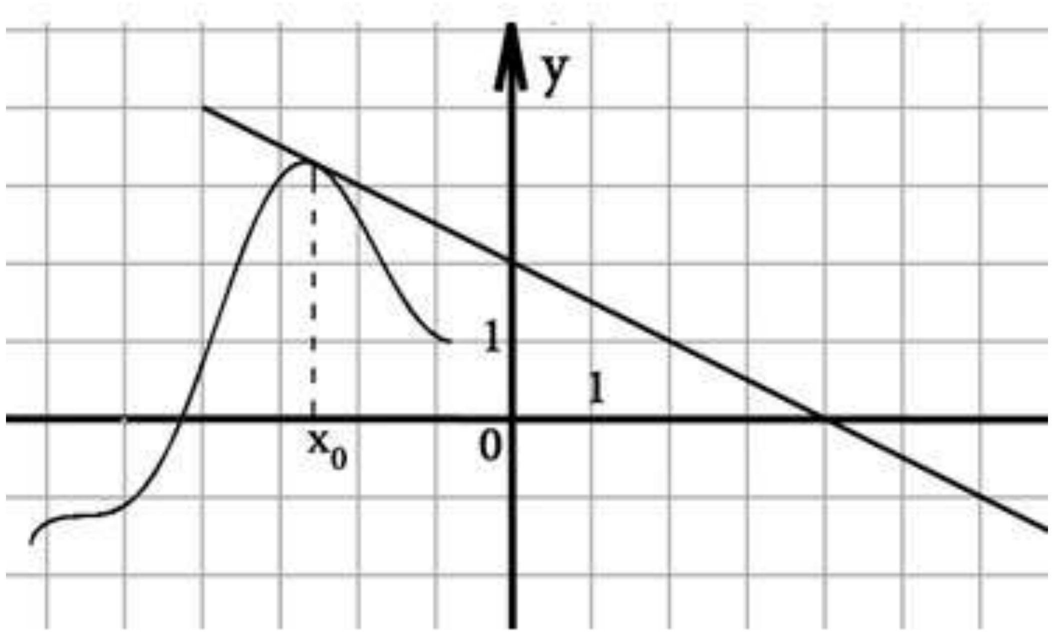
В 7	2					

В 7	0	,	7	5		

Тип 7.2

Реши сам!

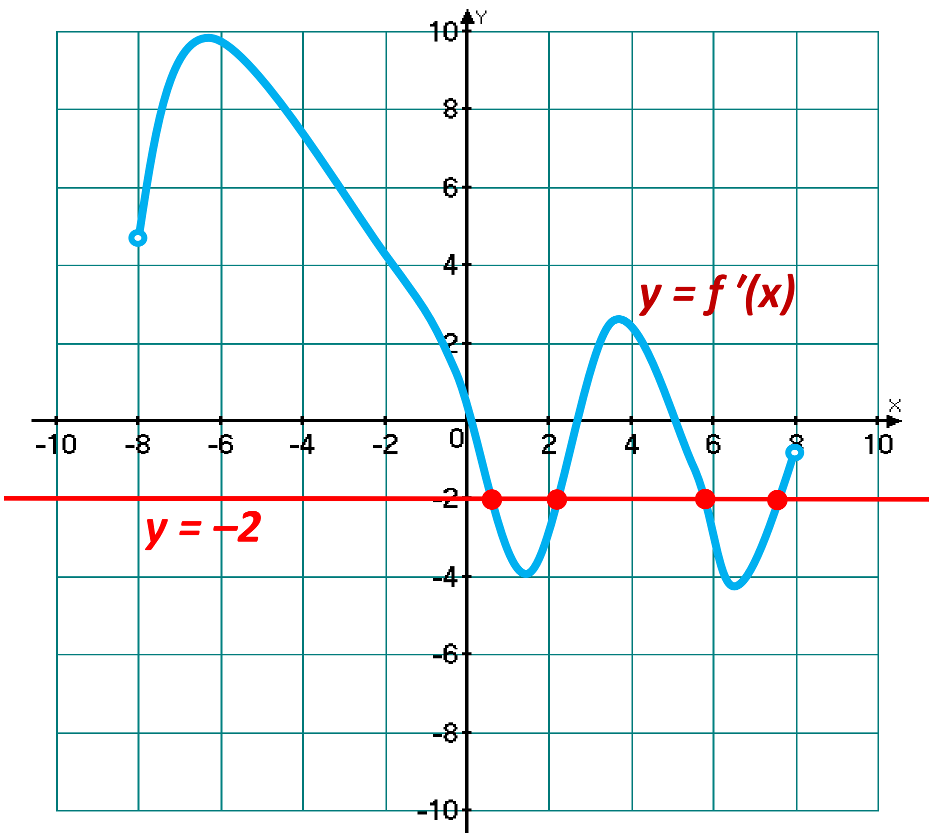
1.4. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



В 7	–	0	,	5		

Тип 7.2.3

На рисунке изображен график *y=f′(x)* – производной функции *f(x)*, определенной на интервале (–8; 8). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции *f(x)* параллельна прямой *y=* –2 или совпадает с ней.



А ЗАТЕМ…

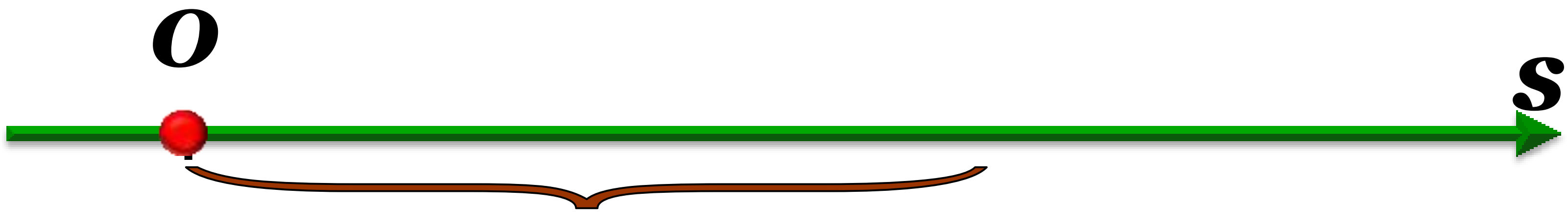
ПЕРЕФОРМУЛИРУЕМ ЗАДАЧУ…

На рисунке изображен график функции *f(x)*, определенной на интервале (–8; 8). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции *f(x)* параллельна прямой *y=*–2 или совпадает с ней.

В 7	4					

7.3. Физический (механический) смысл производной

- Нахождение скорости для процесса, заданного формулой.
- Вторая производная и её физический смысл.



S(t) за время t

$$S'(t) = V(t) \qquad V'(t) = a(t)$$

S(t) - перемещение точки за время t

V(t) – скорость точки в момент t

a(t) – ускорение точки в момент t, вторая производная пути по времени

Тип 7.3.1

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 0{,}5t^2 - 2t - 6$, где x – расстояние от точки отсчета в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 6$ с.

Так как мгновенная скорость точки в момент времени t_o, прямолинейного движения, совершаемого по закону $x=x(t)$, равна значению производной функции x при $t = t_o$, искомая скорость будет равна

$$x'(t) = 0{,}5 \cdot 2t - 2 = t - 2,$$

$$x'(6) = 6 - 2 = 4 \text{ м/с.}$$

В 7	4					

Тип 7.3.2

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=0,5t^2-2t-22$, где x – расстояние от точки отсчета в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 4 м/с?

Решение:

Так как мгновенная скорость точки в момент времени t_o, прямолинейного движения, совершаемого по закону $x = x(t)$, равна значению производной функции x npu $t = t_o$,

искомая скорость будет равна

$x'(t_o) = 0,5 \cdot 2t_o - 2 = t_o - 2$,

Т.к. по условию, $x'(t_o) = 4$, то $t_o - 2 = 4$, откуда

$$t_o = 4 + 2 = 6 \text{ м/с.}$$

В 7	6					

Структура подготовки

Задача 7.2. Геометрический смысл производной

1. Изучение теории
2. Решение ключевых задач каждого типа (1 задача разбирается учителем, 2-3 задачи на закрепление «Реши сам!»)
3. «Проверь себя!» (решение тренировочных заданий по каждому типу)
4. Диагностическая тренировочная работа (работа состоит из 10 задач, обучающиеся решают сами, проверка и разбор ошибок проводится сразу же на уроке, Д/З работа другого варианта)
5. Диагностическая зачётная работа (работа состоит из 10 задач, вариант контрольной или самостоятельной работы на оценку)
6. Анализ и разбор типичных ошибок (учителем ведётся лист контроля по каждому заданию КИМа ЕГЭ как профильного, так и базового уровней)

3. «Проверь себя!»
(решение тренировочных заданий по каждому типу)

Я СДАМ ЕГЭ! **ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ**

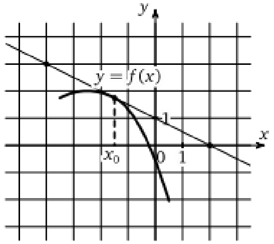
ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАНИЯ
ЗАДАЧА 7. Производная

ЗАДАЧА 7.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ. КАСАТЕЛЬНЫЕ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ

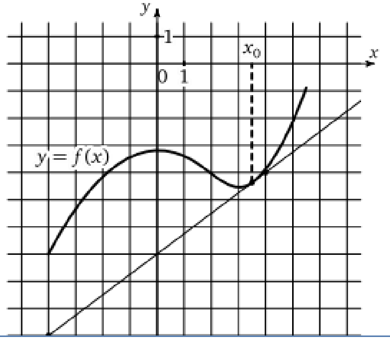
ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

Тип 1. ТР-1

Т1.1. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Т1.2. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



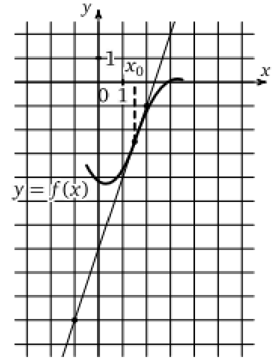
4. Диагностическая тренировочная работа (состоит из 10 задач, обучающиеся решают сами, проверка и разбор ошибок проводится сразу же на уроке, Д/З работа другого варианта).

Я СДАМ ЕГЭ-2021! **ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ**

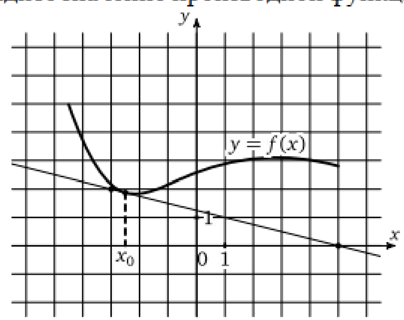
ДИАГНОСТИЧЕСКАЯ ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА

ЗАДАЧА-7.2. Геометрический смысл производной

1. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



2. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



5. Диагностическая зачётная работа (работа состоит из 10 задач, вариант контрольной или самостоятельной работы на оценку)

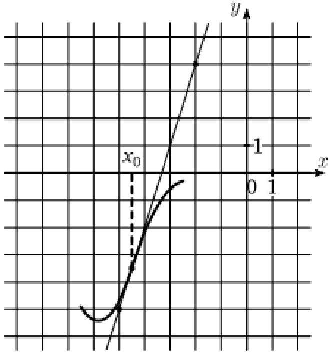
Я СДАМ ЕГЭ-2021! **ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ**

ДИАГНОСТИЧЕСКАЯ ЗАЧЁТНАЯ РАБОТА

ЗАДАЧА-7.2. Геометрический смысл производной

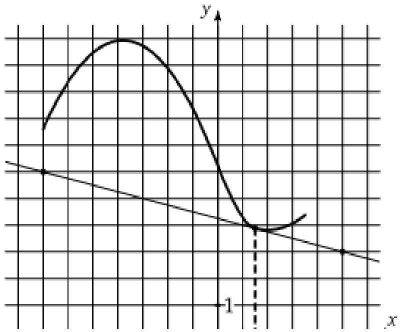
---

1. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



---

2. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



6. Анализ и разбор типичных ошибок (учителем ведётся лист контроля по каждому заданию КИМа ЕГЭ как профильного, так и базового уровней)

РЕЗУЛЬТАТЫ ДИАГНОСТИЧЕСКИХ ЗАЧЁТНЫХ РАБОТ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЕГЭ-2021

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ **11 КЛАСС**

- ***ДЗР** – диагностическая зачетная работа

№ п/п	ФИ учащегося	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Задание 5	Задание 6	Задание 7	Задание 8	Задание 9
		ДЗР	ДЗР	ДЗР	ДЗР	ДЗР	ДЗР	ДЗР	ДЗР	ДЗР
		Дата проведения								
1.		*8б/4*								
2.		*10б/5*								
3.		*6б/3*								
4.		*10б/5*								
5.		*5б/3*								
6.		*10б/5*								
7.		*10б/5*								
8.		*8б/4*								
9.		*10б/5*								
10.		*10б/5*								
11.		*10б/5*								
12.		*9б/4*								
13.		*9б/4*								
14.		*9б/4*								
15.		*10б/5*								

Особенности организации образовательного процесса в 10-11 классах (преподавание математики)

- **Количество часов математики по классам:** в 10 классе – 7 часов (6 ч. урочная деятельность + 1 ч. курс по выбору «Шаг за шагом в мир математики»), в 11 классе – 8 часов (6 ч. урочная деятельность + 2 ч. курс по выбору «Математика в трудных задачах»)
- **Уроки сдвоенные** (2 часа в учебный день)
- **Организован кружок внеурочной деятельности** (на два года обучения, углубленная подготовка к ЕГЭ профильного уровня) для обучающихся 10-11 классов «Шаг за шагом к олимпу ЕГЭ!» – 4 часа (количество воспитанников кружка – 30 человек). План работы разработан с учетом предметных знаний обучающихся 10 и 11 класса и состоит из задач второй части профильного ЕГЭ.
- **УМК** Математика: алгебра и начала математического анализа С.М.Никольский, геометрия Л.С.Атанасян
- **Тема «Производная» изучается в 11 классе в I полугодии** (на уроках все темы отрабатываются преимущественно на задачах ЕГЭ):

  §4. Производная – 14 ч.

  §5. Применение производной – 12 ч.

  §6. Первообразная и интеграл – 12 ч.

Методическая литература

Шестаков С.А., Ященко И.В. ЕГЭ 2020 Математика. Функции, заданные графиками и их производные. Задача 7 (профильный уровень). Задача 14 (базовый уровень). Рабочая тетрадь, 2020

Ященко И.В., Захаров П.И. ЕГЭ 2019 Математика. Геометрический смысл производной. Задача 7 (профильный уровень). Задача 14 (базовый уровень). Рабочая тетрадь, 2019

Ященко И.В., Шестаков С.А., Подготовка к ЕГЭ по математике в 2020 году. Профильный уровень. 2020

Ященко И.В., Шестаков С.А., Подготовка к ЕГЭ по математике в 2020 году. Базовый уровень. 2020

Электронные ресурсы, используемые в работе

- СДАМ ГИА. РЕШУ ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. Математика профильного уровня https://ege.sdamgia.ru/
- Подготовка к ЕГЭ и ОГЭ по математике https://math100.ru/
- Математический портал. Школьная математика. Помощь в подготовке к ОГЭ и ЕГЭ https://www.mathm.ru/index.html
- ЕГЭ и ОГЭ 2021. Материалы для подготовки к экзаменам https://alexlarin.net/ege21.html

Спасибо за внимание!