Приёмы и способы решения заданий № 12 ЕГЭ по математике профильного уровня

Теоретические положения

Задания № 12

ЗАДАНИЯ № 7 И № 12 ПРОВЕРЯЮТ УМЕНИЕ ВЫПОЛНЯТЬ ДЕЙСТВИЯ С ФУНКЦИЯМИ:

- № 7: ОПРЕДЕЛЯТЬ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ ПО ЗНАЧЕНИЮ АРГУМЕНТА, ОПИСЫВАТЬ ПО ГРАФИКУ ПОВЕДЕНИЕ И СВОЙСТВА ФУНКЦИИ, НАХОДИТЬ ПО ГРАФИКУ НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ;
- № 12: ВЫЧИСЛЯТЬ ПРОИЗВОДНЫЕ И ПЕРВООБРАЗНЫЕ ФУНКЦИЙ, ИССЛЕДОВАТЬ ФУНКЦИИ НА МОНОТОННОСТЬ, ЭКСТРЕМУМЫ, НАХОДИТЬ НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

А. Г. Мордкович, П. В. Семёнов АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА, 10 класс, М. 2020. Стр. 390:

Алгоритм исследования непрерывной функции $y = f(x)$ на монотонность и экстремумы

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти стационарные и критические точки.
3. Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знаки производной на получившихся промежутках.
4. Опираясь на теоремы 1, 2 и 5, сделать выводы о монотонности функции и о её точках экстремума.

А. Г. Мордкович, П. В. Семёнов АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА, 10 класс, М. 2020. Стр. 399:

Алгоритм
нахождения наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти стационарные и критические точки функции, лежащие внутри отрезка $[a; b]$.
3. Вычислить значения функции $y = f(x)$ в точках, отобранных на втором шаге, и в точках a и b; выбрать среди этих значений наименьшее (это будет $y_{наим}$) и наибольшее (это будет $y_{наиб}$).

Учебник Алгебра и начала математического анализа

11 класс Колягин Ю. М. и другие

Таким образом, для того чтобы точка x_0 была точкой экстремума непрерывной функции $f(x)$, необходимо, чтобы эта точка была критической для данной функции.

Учебник Алгебра и начала математического анализа

10-11 классы Алимов Ш. А. и другие

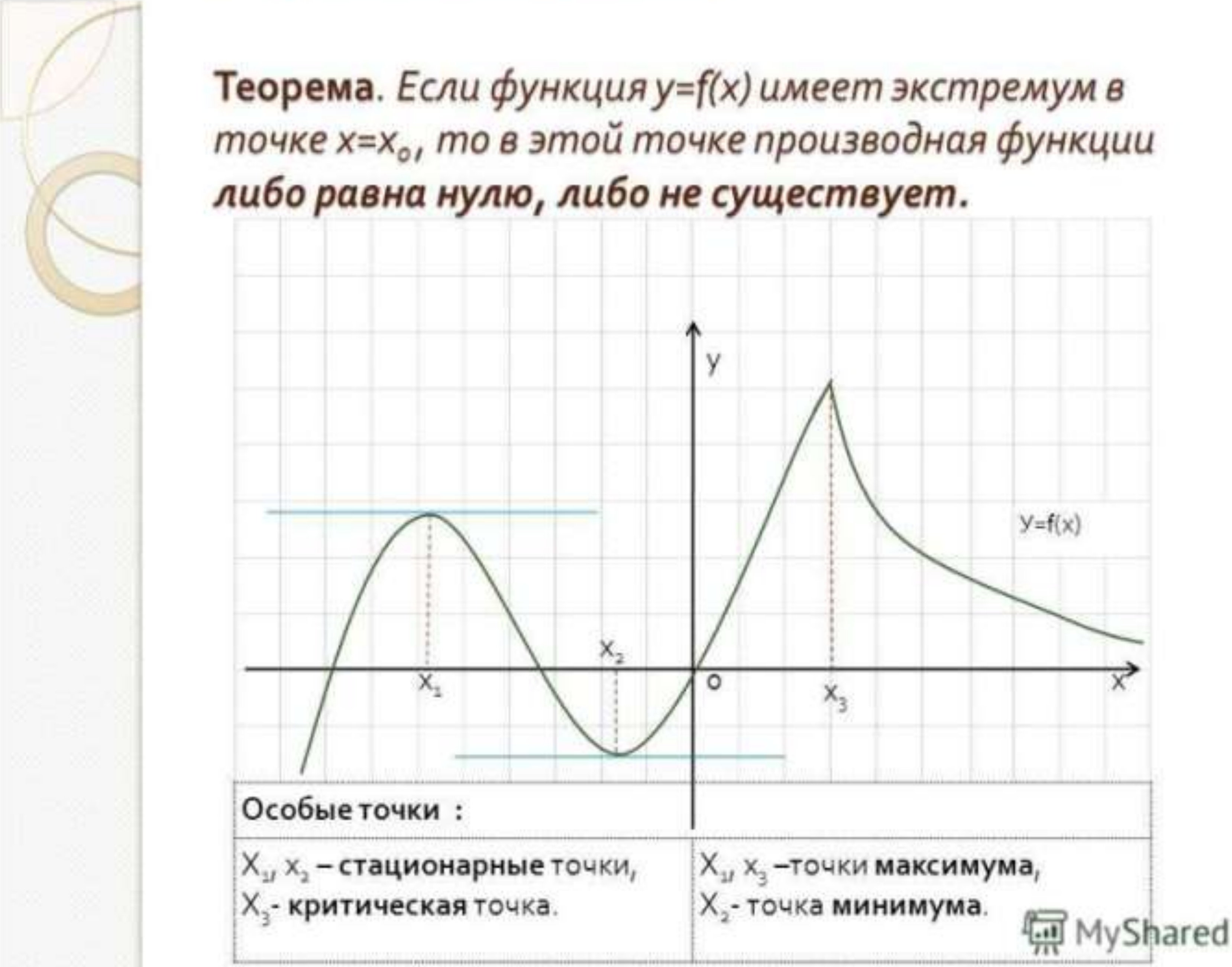
Таким образом, для того чтобы точка x_0 была точкой экстремума функции $f(x)$, *необходимо*, чтобы эта точка была критической точкой данной функции.

Учебник Алгебра и начала математического анализа

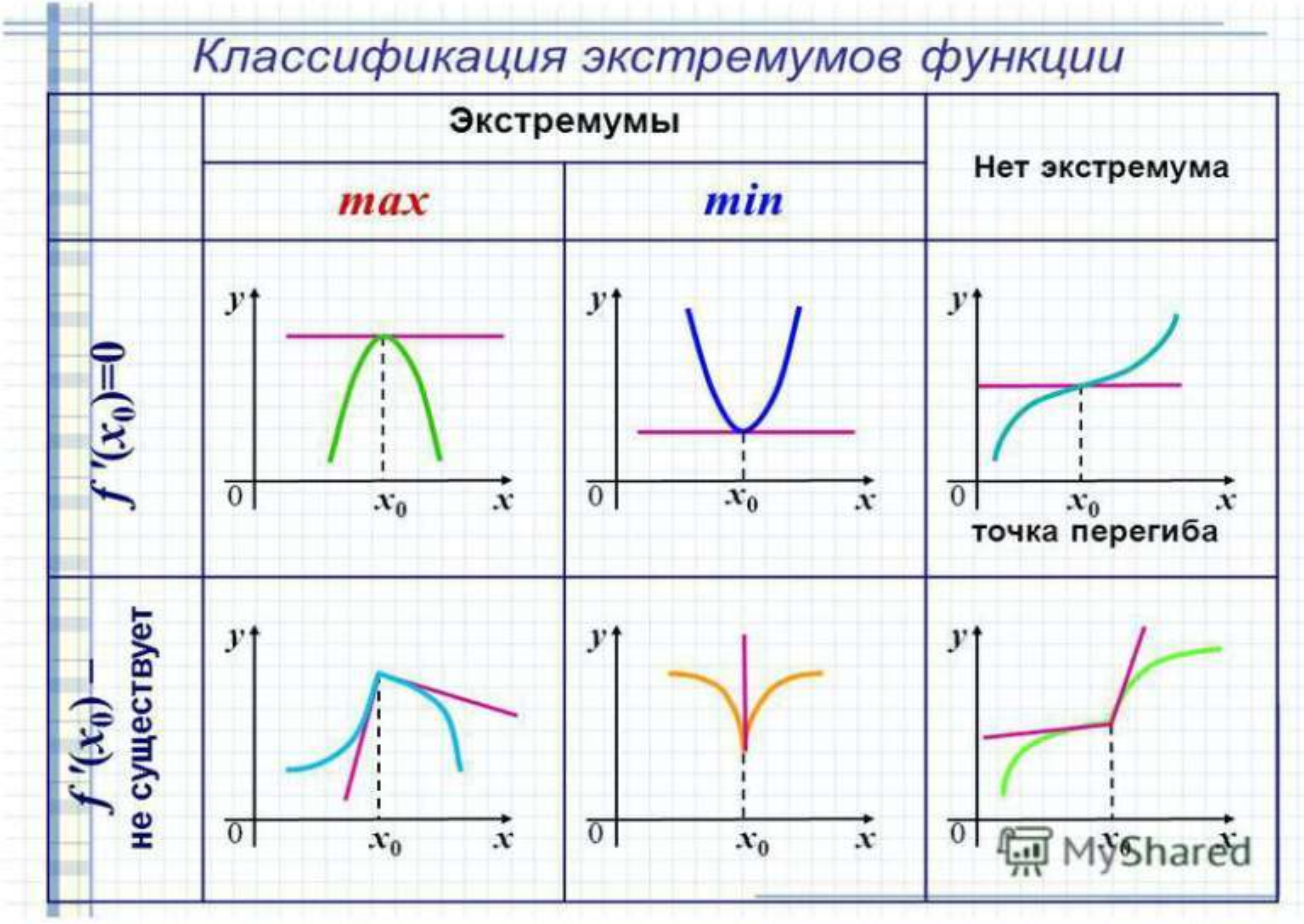
11 класс Никольский С. М. и другие

Из изложенного выше следует, что при отыскании максимума и минимума функции на отрезке надо найти критические точки, лежащие внутри этого отрезка, и сравнить значения функции на концах отрезка и в критических точках.

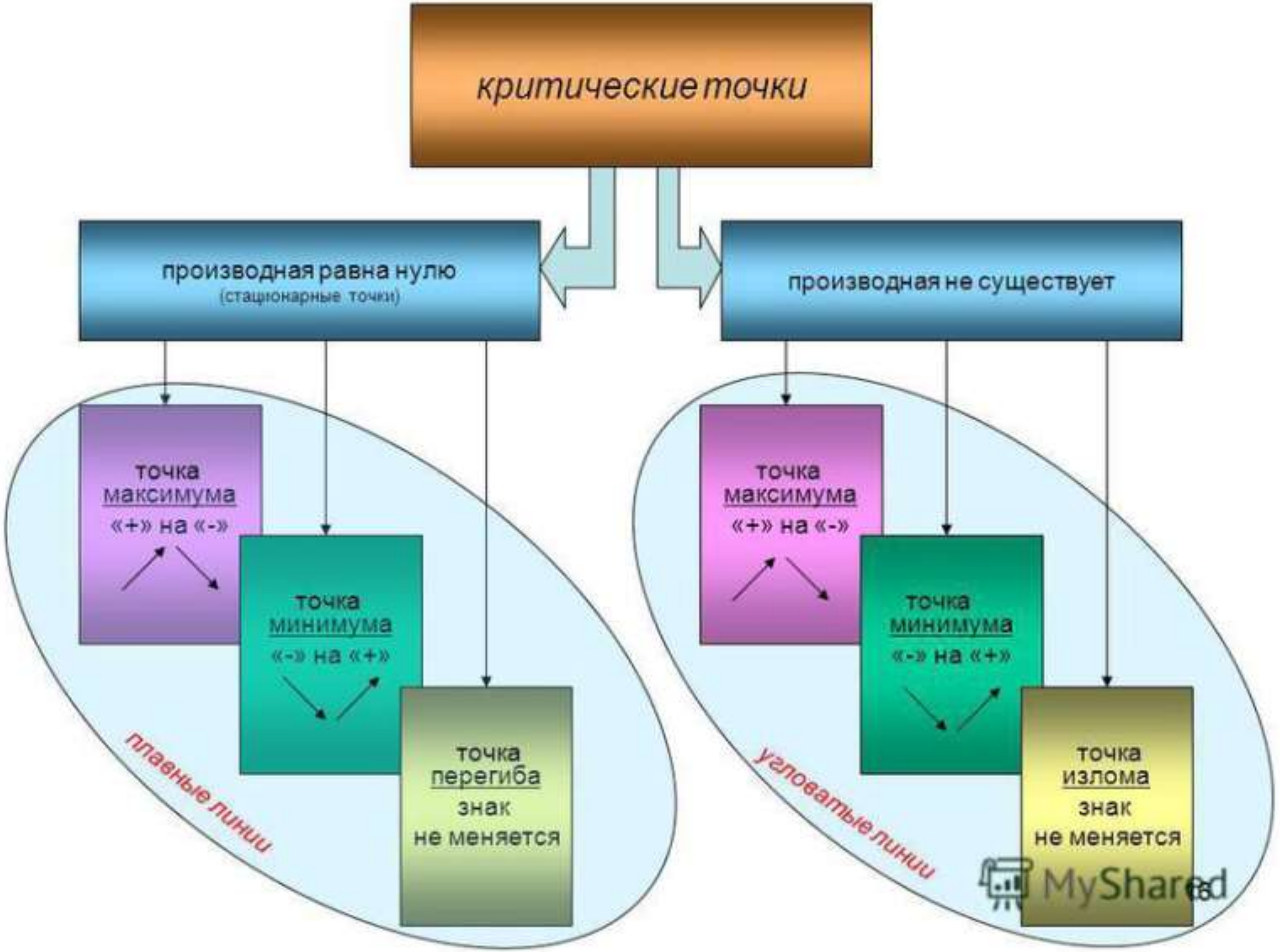
Электронный ресурс: http://www.myshared.ru/slide/593427/



Электронный ресурс: http://www.myshared.ru/slide/1141190/



Электронный ресурс: http://www.myshared.ru/slide/969788/



ЗАДАНИЯ № 12

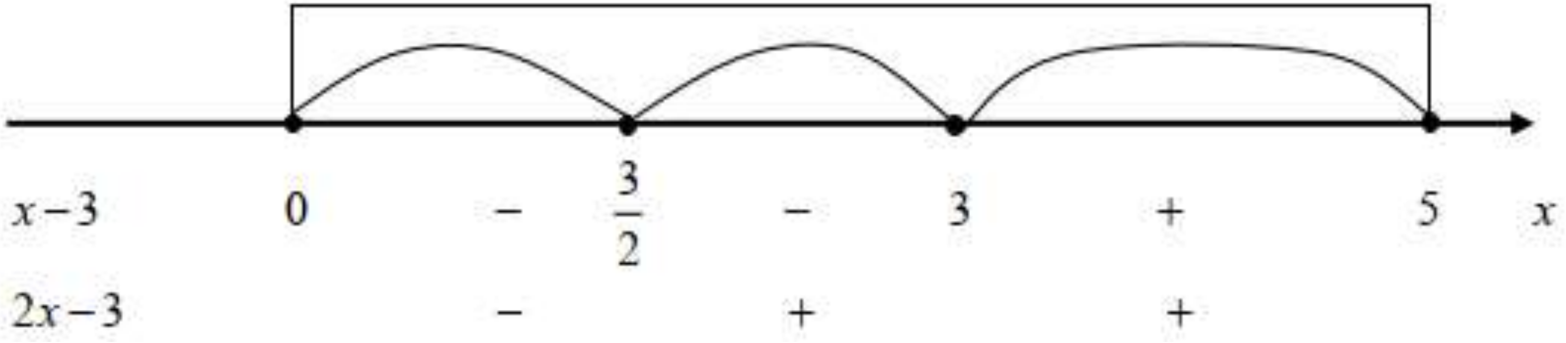
1. Найдите наименьшее значение функции

$y = 4 \cdot |x-3| + 3 \cdot |2x-3|$ **на отрезке** $[0; 5]$

Решение: 1) Выполним преобразование условия задачи.

$|x-3| = 0$, если $x = 3$;

$|2x-3| = 0$, если $x = \frac{3}{2}$.



$$y=\begin{cases} 4(-x+3)+3(-2x+3), \text{ если } 0 \le x < \dfrac{3}{2}, \\ 4(-x+3)+3(2x-3), \text{ если } \dfrac{3}{2} \le x \le 3, \\ 4(x-3)+3(2x-3), \text{ если } 3 < x \le 5; \end{cases}$$

$$y=\begin{cases} -10x+21, \text{ если } 0 \le x < \dfrac{3}{2}, \\ 2x+3, \text{ если } \dfrac{3}{2} \le x \le 3, \\ 10x-21, \text{ если } 3 < x \le 5; \end{cases}$$

2) Исследуем функцию $y(x)$ на наименьшее

значение на отрезке $[0;5]$.

$$y' = \begin{cases} -10, \text{ если } 0 < x < \dfrac{3}{2}, \\ 2, \text{ если } \dfrac{3}{2} < x < 3, \\ 10, \text{ если } 3 < x < 5. \end{cases}$$

На концах отрезка и в точках $\dfrac{3}{2}$ и 3 отрезка $[0;5]$ производная не существует.

Точек, в которых производная равно 0, нет.

$$y(0)=4\cdot|0-3|+3\cdot|2\cdot0-3|=12+9=21,$$

$$y\left(\frac{3}{2}\right)=4\cdot\left|\frac{3}{2}-3\right|+3\cdot\left|2\cdot\frac{3}{2}-3\right|=6+0=6,$$

$$y(3)=4\cdot|3-3|+3\cdot|2\cdot3-3|=0+9=9,$$

$$y(5)=4\cdot|5-3|+3\cdot|2\cdot5-3|=8+21=29.$$

Наименьшее значение функции $y(x)$

на отрезке $[0;5]$ равно 6.

Ответ: 6

2. Сайт Ларин А. А. Математика. Репетитор.

Вариант 339. Задание 12.

Найдите точку максимума функции

$$y=\left(x^2-28x+28\right)\cdot e^{2-x}$$

Решение. Область определения функции – множество действительных чисел.

$$y'(x) = \left(x^2 - 28x + 28\right)' \cdot e^{2-x} + \left(x^2 - 28x + 28\right)\left(e^{2-x}\right)' =$$

$$= (2x - 28) \cdot e^{2-x} + \left(x^2 - 28x + 28\right) e^{2-x} \cdot (2 - x)' =$$

$$= (2x - 28) \cdot e^{2-x} - \left(x^2 - 28x + 28\right) e^{2-x} =$$

$$= e^{2-x}\left(2x - 28 - x^2 + 28x - 28\right) = \left(-x^2 + 30x - 56\right) \cdot e^{2-x}.$$

$$y'(x) = -\left(x^2 - 30x + 56\right) \cdot e^{2-x}$$

Нет таких x, в которых $y'(x)$ не существует.

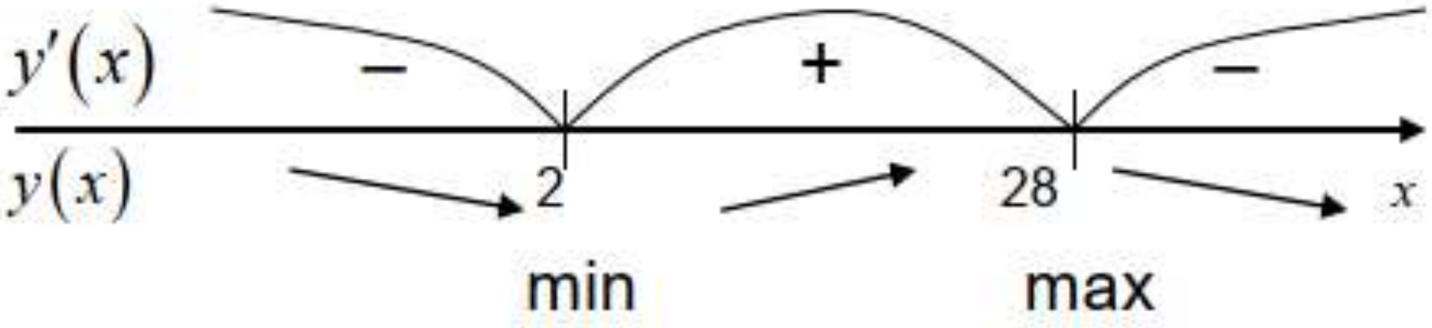
$y'(x) = 0$, если $x^2 - 30x + 56 = 0$.

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 56, \\ x_1 + x_2 = 30, \end{cases}$$

где x_1 и x_2 − корни уравнения.

$x_1 = 2, \quad x_2 = 28.$

$$y'(x) = -(x-2)(x-28) \cdot e^{2-x}$$



2 – точка минимума

28 – точка максимума

Ответ: 28

3. Найдите сумму значений функции $y = 2\sin^3 x - 3\sin x$ в точках экстремума, принадлежащих промежутку $[-\pi;\ \pi]$.

$$y'(x)=6\sin^2 x\cdot(\sin x)'-3\cos x;$$

$$y'(x)=6\sin^2 x\cdot\cos x-3\cos x;$$

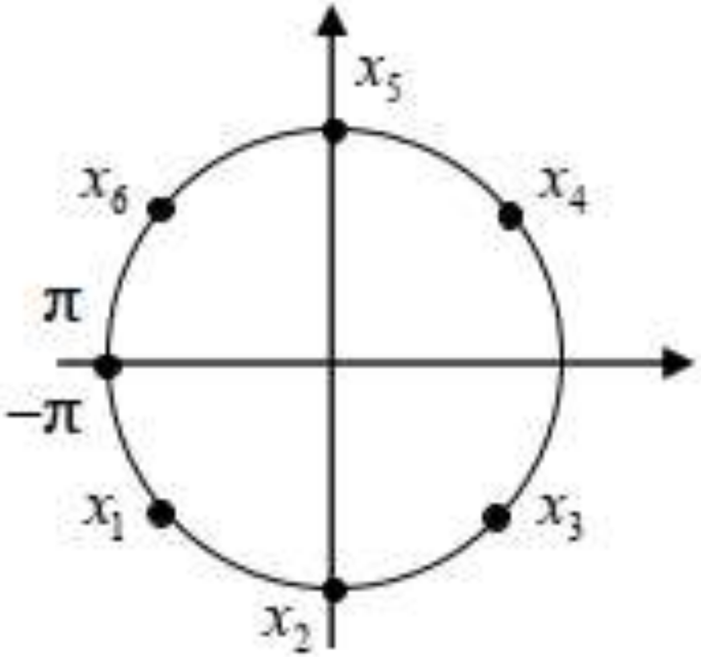
$$y'(x)=3\cos x\left(2\sin^2 x-1\right).$$

Нет таких x, в которых $y'(x)$ не существует.

$y'(x)=0$, если $3\cos x\left(2\sin^2 x-1\right)=0;$,

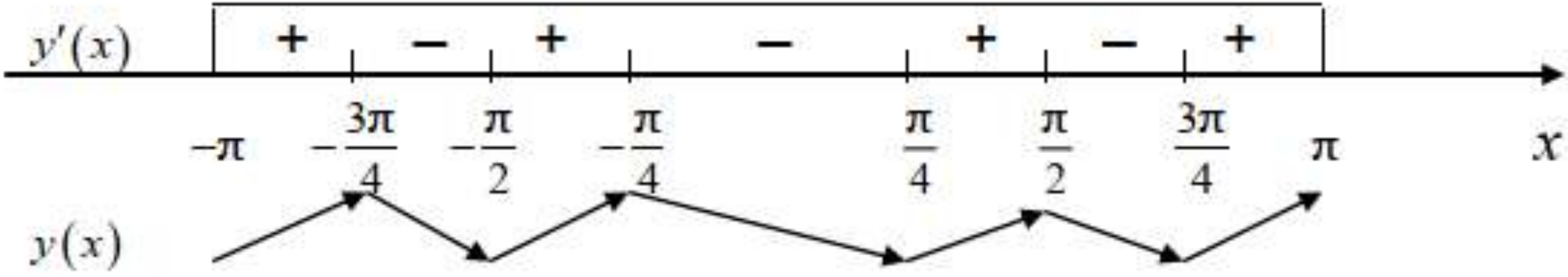
$$\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ 2\sin^2 x-1=0;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \sin^2 x=\dfrac{1}{2};\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \sin x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\end{array}\right.$$

Укажем корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi]$.



$$x_1 = -\frac{3\pi}{4}; \quad x_2 = -\frac{\pi}{2}; \quad x_3 = -\frac{\pi}{4}; \quad x_4 = \frac{\pi}{4}; \quad x_5 = \frac{\pi}{2}; \quad x_6 = \frac{3\pi}{4}.$$

Обратим внимание на то, что $x_1 = -x_6; \quad x_2 = -x_5; \quad x_3 = -x_4.$



$-\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$ – точки максимума,

$-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$ – точки минимума.

Найдём сумму значений функции в точках экстремума, учитывая, что функция $y(x)$ является нечётной.

$$y(x_1)+y(x_2)+y(x_3)+y(x_4)+y(x_5)+y(x_6)=$$
$$=y(-x_6)+y(-x_5)+y(-x_4)+y(x_4)+y(x_5)+y(x_6)=$$
$$=-y(x_6)-y(x_5)-y(x_4)+y(x_4)+y(x_5)+y(x_6)=0$$

Ответ: 0

Спасибо за внимание!

- **Панина Н. А.**