Материал подготовила Винокурова Анна Сергеевна,
к.ф.-м.н., доцент кафедры НИИ (ТУ) СФ МЭИ

Подобие треугольников в задачах с окружностями

Часто ключом к решению непростых задач с окружностями является отыскание или дополнительное построение пары подобных треугольников.

Задача1. В трапеции ABCD основания $AB = a$, $CD = b$ $(a < b)$. Окружность проходящая через вершины A, B и C, касается стороны AD. Найдите диагональ AC.

Задача 2. В круге проведены две хорды AB и CD, пересекающиеся в точке M, L – точка пересечения биссектрисы угла BMD с хордой BD. Найдите отрезки BL и LD, если $BD = a$, а площади ΔCMB и ΔAMD относятся как $b : c$.

Задача 3. В угол вписаны, касающиеся внешним образом окружности радиусов r и R $(r < R)$. Первая из них касается сторон угла в точках A и B. Найдите AB.

Задача 4. Около окружности описана равнобедренная трапеция. Боковая сторона равна a, отрезок, соединяющий точки касания боковых сторон с окружностью равен b. Найдите диаметр окружности $(b < a)$.

Задача 5. В некоторый угол вписана окружность радиуса r. Хорда, соединяющая точки касания, равна a. К окружности проведены две касательные, параллельные хорде. Найдите стороны полученной трапеции.

Задача 6. Из вершины тупого угла A ΔABC опущена высота AD. Проведена окружность с центром в точке D, радиусом равным AD. Она пересекает стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Найдите сторону AC, если известно, что $AB = c, AM = m,\ AN = n$.

Задача 7 (аналог задачи 324602 из банка ОГЭ). Биссектриса CM делит сторону AB на отрезки, $AM = a$ и $BM = b$ $(a > b)$. Касательная к описанной окружности ΔABC, проходящая через точку С, пересекает прямую AB в точке D. Найдите CD.

Задача 8 (аналог задачи 324609 из банка ОГЭ). Окружности радиусов r и R $(r < R)$ касаются внешним образом. Точки A и B лежат на первой окружности, точки C и D – на второй. При этом AC и BD – общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.

Задача 9 (аналог задачи 324611 из банка ОГЭ). На стороне AB треугольника ABC взята точка D так, что окружность проходит через точки A, C, D, касается прямой BC. Найдите AD, если $AC = a, BC = b, CD = d$ $(a > d)$.

Задача 10 (Пример задания 16 ЕГЭ 2017 профиль). Две окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами 3, 4 пересекаются в точках A и B, причем точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB. Через точку A проведена прямая, вторично пересекающая эти окружности в точках M и K, причем точка A лежит между точками M и K.

а) Докажите, что треугольники MBK и O_1AO_2 подобны;

б)Найдите расстояние от точки B до MK, если MK=7, а $O_1O_2 = 5$.

Задача 11 (Пример задания 16 ЕГЭ 2016 профиль). Квадрат ABCD вписан в окружность. Хорда CE пересекает его диагональ BD в точке K.

а) Докажите, что $CK \cdot CE = AB \cdot CD$;

б) Найдите отношение CK и KE, если угол ACD равен 15^0.

Задача 12 (Пример задания 18 ЕГЭ 2015 профиль).

Диагонали AC и BD четырехугольника ABCD, вписанного в окружность, пересекаются в точке P, причем BC=CD

а) Докажите, что $AB: BC = AP: PD$;

б) Найдите площадь ΔCOD, где O – центр окружности, вписанной в ΔABD, если дополнительно известно, что BD – диаметр описанной около четырехугольника $ABCD$ окружности, AB=6, а BC=$6\sqrt{2}$.