ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ МАРАФОН МАСТЕР-КЛАССОВ

РЕШЕНИЕ ТРУДНЫХ ЗАДАНИЙ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

Панина Н. А.,
учитель математики
МБОУ СШ № 33,
г. Смоленск

Март 2026 г.

РАЗДЕЛ 1

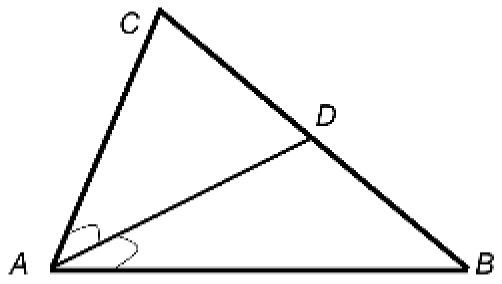
РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРИЁМЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ С КРАТКИМ ОТВЕТОМ

1. Если чертёж сопровождает условие задачи, то решаем её по готовому чертежу:

- исходные данные наносим на чертёж,
- умозаключения выполняем устно, результаты наносим на чертёж,
- более сложные расчёты выполняем письменно, промежуточный результат фиксируем на чертеже.

Примеры решения задания 1

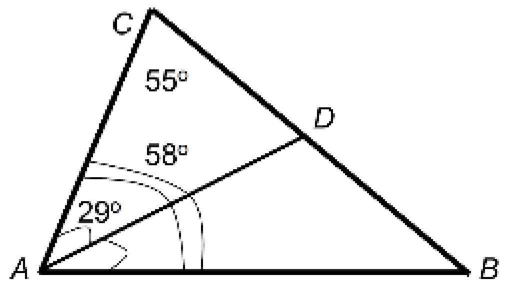
1 В треугольнике *ABC* угол *C* равен 55°, *AD* – биссектриса, угол *CAD* равен 29°. Найдите величину угла *ABD*. Ответ дайте в градусах. (ЕГЭ 2025, открытый вариант)



Решение.

1) Устно:
AD – биссектриса угла *BAC*, тогда она делит угол на 2 равные части.
Угол *CAD* – 29°, тогда весь угол *BAC* равен 58°.

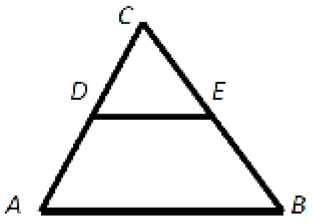
2) Устно: сумма углов треугольника *ABC* равна 180°.
Письменно: $\angle ABC = \angle ABD = 180° - (58° + 55°) = 180° - 113° = 67°$



Ответ: 67 (на ЕГЭ значения указываем без наименования)

2

Площадь треугольника *ABC* равна 24, *DE* – средняя линия, параллельная стороне *AB*. Найдите площадь треугольника *CDE* (ЕГЭ 2023, открытый вариант)



Решение. Первый способ.

Устно:

1) *DF* – средняя линия, параллельная стороне *AB*.
2) Любая прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает треугольник, подобный данному. Тогда (письменно)

$$\frac{S_{\Delta CDE}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{DE^2}{AB^2}=\frac{\left(\frac{1}{2}AB\right)^2}{AB^2}=\frac{\frac{1}{4}AB^2}{AB^2}=\frac{1}{4}; \qquad S_{\Delta CDE}=\frac{1}{4}\cdot 24=6.$$

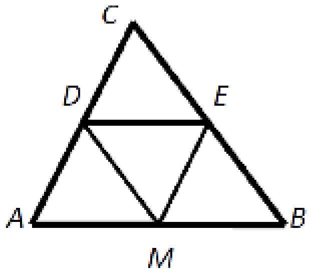
Ответ: 6

Второй способ (метод мозаики)

Дополнительное построение на готовом чертеже: средние линии *DM* и *EM*.

Устно:

Три средние линии треугольника разбивают треугольник на 4 равных треугольника (треугольники равны по трём сторонам). Тогда (письменно)



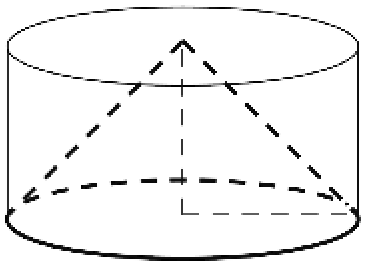
$S_{\Delta CDE}=S_{\Delta ABC}:4=24:4=6.$

Ответ: 6

2. Если решаем геометрическую задачу про два пространственных тела, то наиболее эффективный метод решения – метод сопоставления.

Примеры решения задания 3.

3 Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $3\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса. (ЕГЭ 2025, открытый вариант)



Решение

Шаг 1. Сопоставляем характеристики тел вращения:

Радиус основания одинаковый, равен *R*,

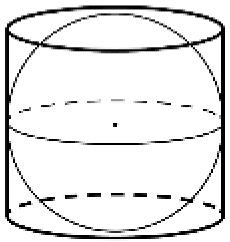
Высота цилиндра равна высоте конуса и равна *R*.

Шаг 2. Сопоставляем боковые поверхности тел, опираясь на формулы:

Цилиндр	Конус
$S_{\substack{бок.\\ цилиндра}} = 2\pi Rh = 2\pi R^2;$	$S_{\substack{бок.\\ конуса}} = \pi Rl = \pi R\sqrt{R^2+R^2} = \underbrace{\pi R^2\sqrt{2} = \frac{2\pi R^2}{\sqrt{2}}}_{\text{моделируем выражение } S_{\substack{бок.\\ цилиндра}}} = \frac{S_{\substack{бок.\\ цилиндра}}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3.$

Ответ: 3

4 Шар, объём которого равен 24, вписан в цилиндр. Найдите объём цилиндра (ЕГЭ 2023, открытый вариант)



Решение

Шаг 1. Сопоставляем характеристики тел вращения:

Радиус основания цилиндра равен радиусу шара и равен R,

Высота цилиндра равна диаметру шара и равна $2R$.

Шаг 2. Сопоставляем объёмы тел

Шар

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = 24;$$

$$4\pi R^3 = 24 \cdot 3;$$

$$\pi R^3 = \frac{24 \cdot 3}{4} = 6 \cdot 3 = 18;$$

$$\pi R^3 = 18$$

Цилиндр

$$V_{\text{цилиндра}} = S_{\text{осн.}} \cdot h =$$

$$= \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3 =$$

$$= 2 \cdot 18 = 36.$$

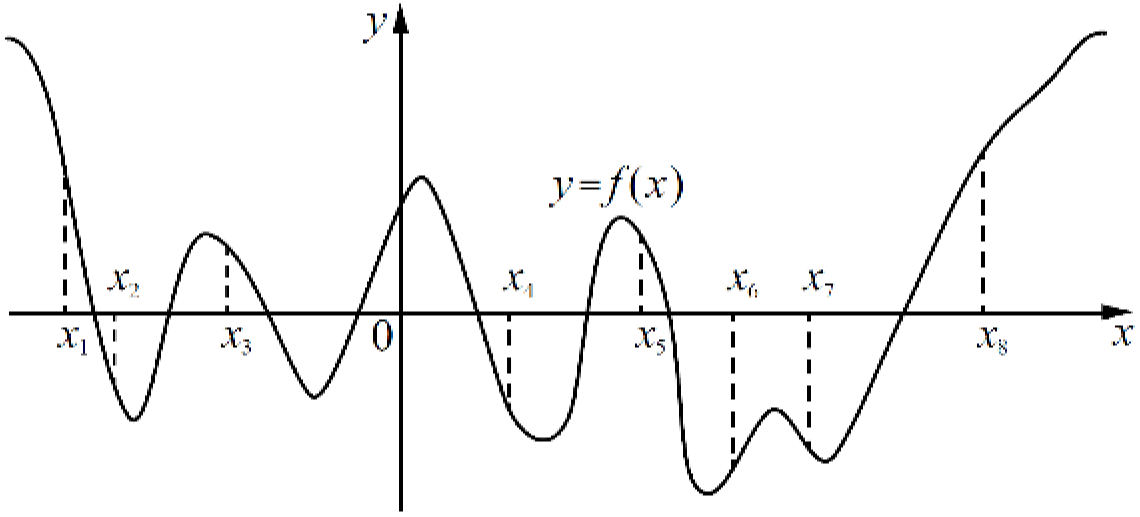
Ответ: 36

3. При выполнении базового задания на тему «Функция и её производная» (задание 8 на ЕГЭ (профильная математика)) решение начинаем с вопроса «ЧЕЙ ГРАФИК Я ЧИТАЮ?»

• ***Если читаем график функции***, то мысленно проводим касательные и исследуем углы их наклона:

✓ В точке с абсциссой x_0 угол наклона касательной острый → $f'(x_0) > 0$.
✓ В точке с абсциссой x_0 угол наклона касательной тупой → $f'(x_0) < 0$.
✓ В точке с абсциссой x_0 касательная параллельна оси Ox или совпадает с ней → $f'(x_0) = 0$.
✓ В точке с абсциссой x_0 касательная параллельна оси Oy или превращается в ломаную линию → $f'(x_0)$ не существует (в точке x_0 функция не является дифференцируемой)

ЕГЭ-2023. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечено восемь точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. Найдите количество отмеченных точек, в которых производная функции $f(x)$ положительна.



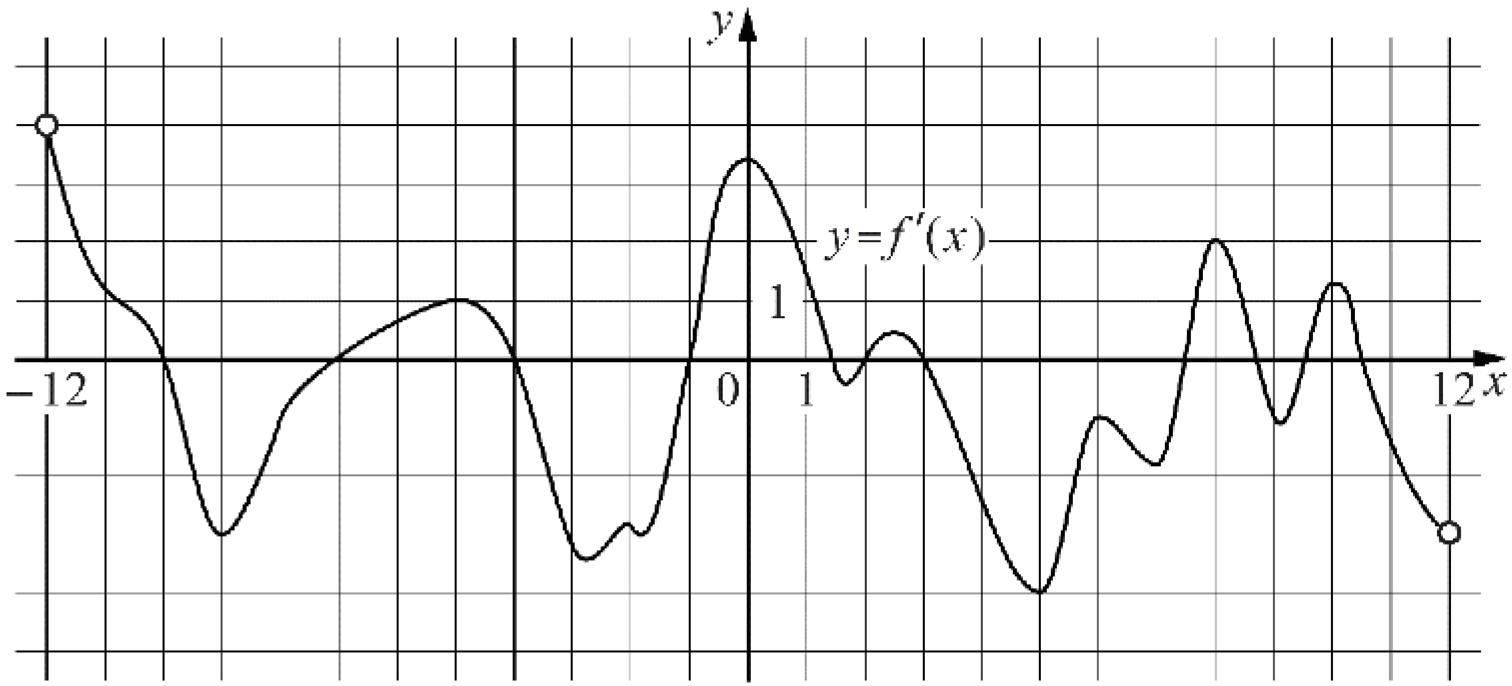
Решение. В каждой указанной точке мысленно проводим касательную. В точках x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7 угол наклона касательной тупой, производная в этих точках отрицательная. В точках x_6 и x_8 угол наклона касательной острый, производная в этих точках положительная.

Ответ: 2

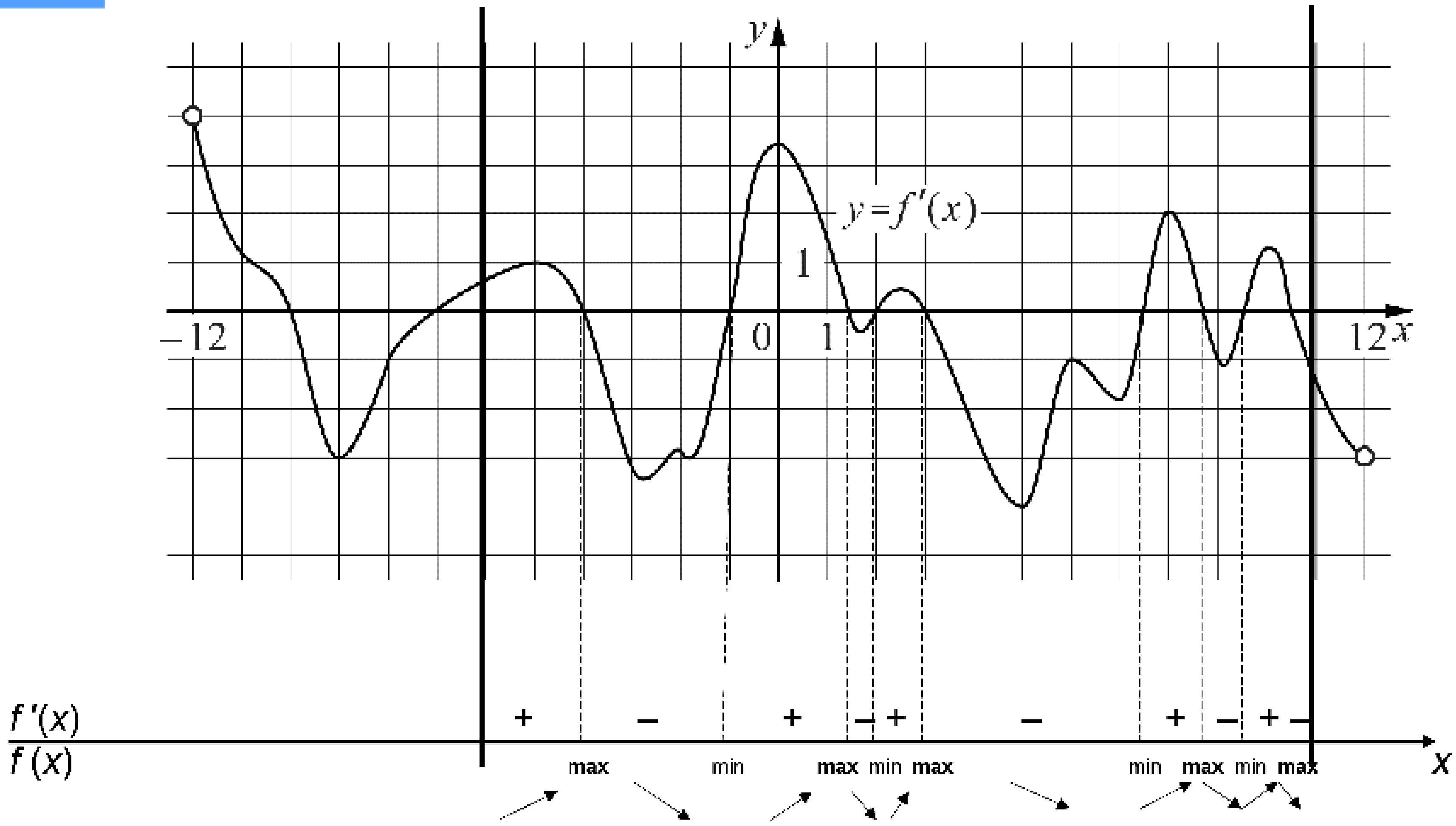
- ***Если читаем график производной функции***, то исследуем знак производной в интервале и составляем суждение о монотонности функции:

❑ Если на интервале значения производной положительные, то на этом интервале функция возрастает.
❑ Если на интервале значения производной отрицательные, то на этом интервале функция убывает.

ЕГЭ-2024. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале (–12; 12). Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку [–6; 11].



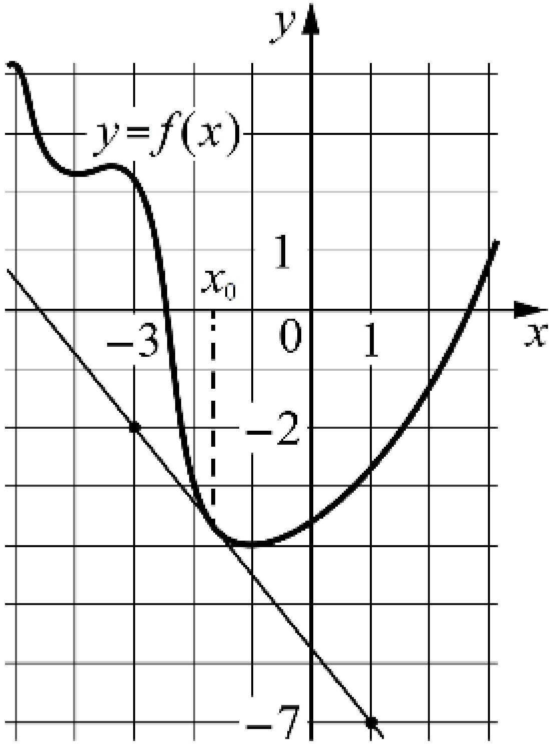
Решение. Выделяем отрезок [–6; 11]. Составляем графическую схему исследования знаков производной и составляем суждения о монотонности функции



Ответ: 5

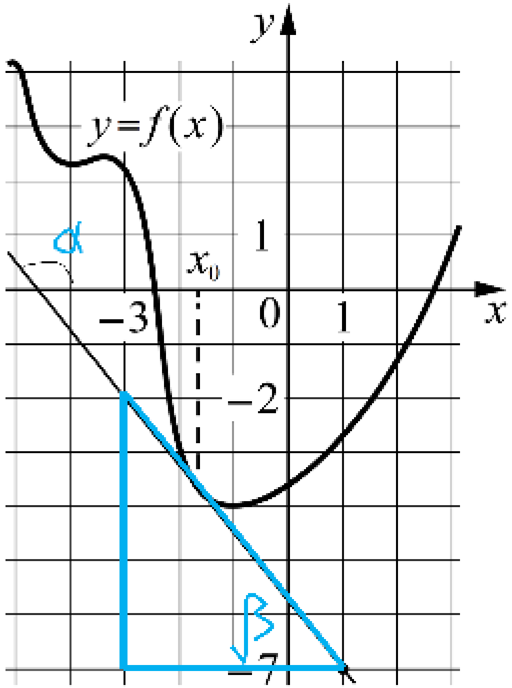
- ***Если на чертеже представлен график функции и касательная*** в точке x_0, то опираемся на геометрический смысл производной

ЕГЭ-2025. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Решение

Опираемся на геометрический смысл производной:

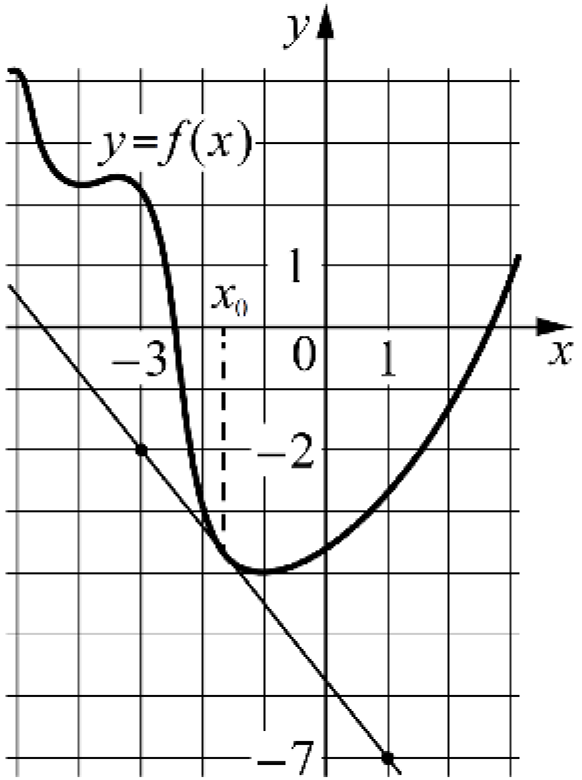


$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(180° - \beta) = -\operatorname{tg}\beta = -\frac{5}{4} = -1,25$$

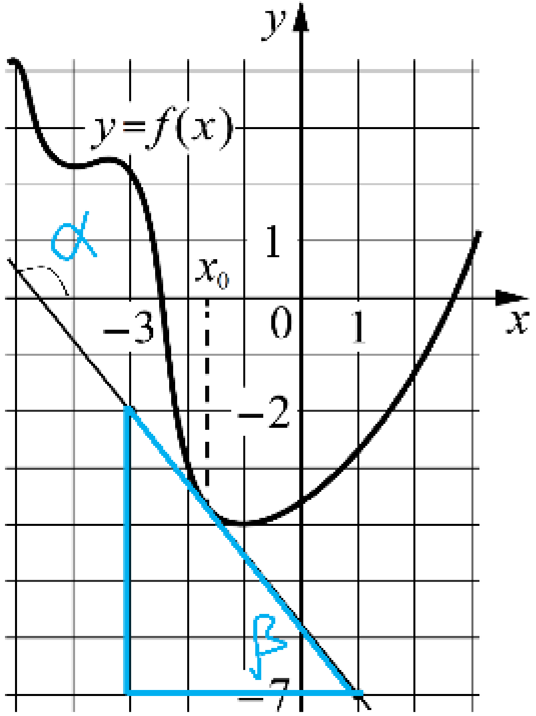
Ответ: –1,25

Задания 8 тренировочной базы ЕГЭ-2026

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $g(x) = 4f(x) - 5x + 2$ в точке x_0.



Решение



$g(x) = 4f(x) - 5x + 2$

$g'(x) = 4f'(x) - 5$

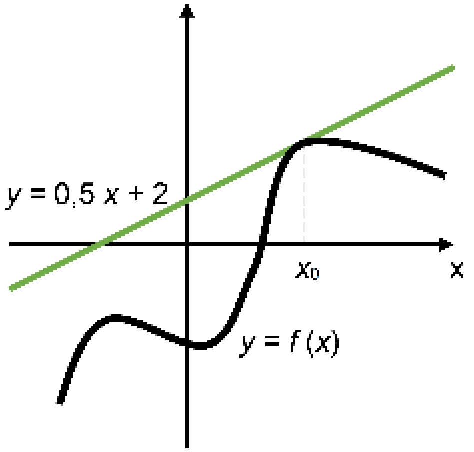
$g'(x_0) = 4f'(x_0) - 5$

$$f'(x_0) = \mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}(180^\circ - \beta) = -\mathrm{tg}\,\beta = -\frac{5}{4} = -1{,}25$$

$g'(x_0) = 4\cdot(-1{,}25) - 5 = -5 - 5 = -10.$

Ответ: –10

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $g(x) = 4f(x) – 5x + 2$ в точке x_0.



Решение

$g(x) = 4f(x) – 5x + 2$

$g'(x) = 4f'(x) – 5$

$g'(x_0) = 4f'(x_0) – 5$

$$f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha = k_{касат.} = 0,5$$

$$g'(x_0) = 4 \cdot 0,5 - 5 = 2 - 5 = -3$$

Ответ: –3

4. При выполнении задания 9 (задача практического содержания, проверяется умение применять математический аппарат в незнакомой ситуации) нужно сопоставить единицы измерения при работе по формуле с единицами измерения для представления ответа

Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 90$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 16$ км/ч^2. Расстояние (в км) от мотоциклиста до города вычисляется по формуле $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, где t — время в часах, прошедшее после выезда из города. Определите время, прошедшее после выезда мотоциклиста из города, если известно, что за это время он удалился от города на 72 км. Ответ дайте в минутах.

Решение. $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$

$$72 = 90t + \frac{16t^2}{2}; \quad 72 = 90t + 8t^2; \quad 36 = 45t + 4t^2; \quad 4t^2 + 45t - 36 = 0$$

$$D = 5\cdot 9\cdot 5\cdot 9 + 4\cdot 4\cdot 9\cdot 4 = 9\cdot(225 + 64) = 9\cdot 289 = 3^2\cdot 17^2 = 51^2$$

$$t_{1,2} = \frac{-45 \pm 51}{8}; \qquad t_1 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}; \qquad t_2 < 0, \text{ не подходит.}$$

$\frac{3}{4}$ часа = 45 минут.

Ответ: 45

5. При решении текстовой задачи

1) не требуется чёткое соблюдение алгоритма, в отличие от 9 класса. В 11 классе в целях экономии времени можно логически соединить смысл переменных, их свойства и составленное уравнение;

2) нет таблицы квадратов, поэтому дискриминант находим, не методом вычисления, а методом разложения на множители.

Например: Велосипедист выехал из города *A* в город *B*, расстояние между которыми равно 105 км. Его скорость была постоянной на протяжении всего пути. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 7 км/ч больше прежней. В пути он сделал остановку, которая составила 4 часа. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь от *A* до *B*. Найдите скорость велосипедиста на пути из *B* в *A*. Ответ дайте в километрах в час.

Решение

$$\frac{105}{x}=\frac{105}{x+7}+4.$$

По смыслу задачи $x>0,\ \ x+7>0$. Тогда

$$105(x+7)=105x+4x(x+7),$$

$$105x+105\cdot 7=105x+4x^2+28x,$$

$$4x^2+28x-105\cdot 7=0,$$

$$4x^2+28x-105\cdot 7=0,$$

$$D=4\cdot 7\cdot 4\cdot 7+4\cdot 4\cdot 7\cdot 15\cdot 7=28^2\cdot(1+15)=28^2\cdot 4^2=112^2,$$

$$x_1=\frac{-28-112}{8}<0,\quad \text{не подходит,}\qquad x_2=\frac{-28+112}{8}=\frac{84}{8}=10,5.$$

10,5 км/ч – скорость велосипедиста на пути из *A* в *B*.

10,5 + 7 = 17,5 (км/ч) – скорость на пути из *B* в *A*.

Ответ: 17,5 (как на ЕГЭ)

ЕГЭ-2023. Первая труба пропускает на 4 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 672 литра она заполняет на 4 минуты быстрее, чем первая труба?

Решение

	Производительность труда (л/мин.)	Время, мин.	Объём работы, л
1-я труба	$x-4$	$\frac{672}{x-4}$	672
2-я труба	x	$\frac{672}{x}$	672

$$\frac{672}{x-4}-\frac{672}{x}=4\quad\Leftrightarrow\quad\frac{168}{x-4}-\frac{168}{x}=1.$$

По смыслу задачи $x-4>0$, $x>0$, тогда $168x-168(x-4)=x^2-4x$.

$$x^2-4x-4\cdot 168=0,\qquad D=4\cdot 4+4\cdot 4\cdot 168=16\cdot(1+168)=16\cdot 169=4^2\cdot 13^2=52^2,$$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm 52}{2}=2\pm 26.$$

Так как $x-4>0$, то $x=28$. Вторая труба пропускает 28 литров воды в минуту. Ответ: 28

РАЗДЕЛ 2

ВЫПОЛНЕНИЕ ЗАДАНИЙ С РАЗВЁРНУТЫМ ОТВЕТОМ

Задание 13. *Участники экзамена часто допускают ошибку в применении формул приведения.*

Если участник ЕГЭ знает, что в процессе подготовки к экзамену он неоднократно применял формулы приведения неправильно, то ему нужно осознать, что в этот момент он должен иначе организовать свои действия: нужно не применять мнемоническое правило, а выстроить полную цепочку рассуждений, используя справочный материал ЕГЭ.

На первой странице КИМ (контрольно-измерительного материала) указаны 4 формулы:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Мысленно эти формулы можно дополнить самому:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Преобразование выражения выполнить (можно на черновике, можно в чистовике) более подробно, например: $\cos(\pi-2x) = \cos\pi\cdot\cos 2x + \sin\pi\cdot\sin 2x = -1\cdot\cos 2x + 0\cdot\sin 2x = -\cos 2x$.

13

а) Решите уравнение $\dfrac{\left(81^{|\cos x|}\right)^{\sin x}-9^{\sqrt{3}\sin x}}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Решение

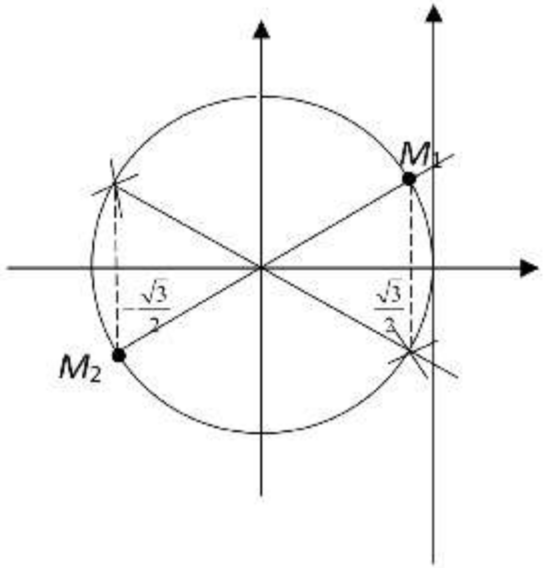
а) $\dfrac{\left(81^{|\cos x|}\right)^{\sin x}-9^{\sqrt{3}\sin x}}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}=0 \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\left(9^{2|\cos x|}\right)^{\sin x}-9^{\sqrt{3}\sin x}}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{9^{2\sin x\cdot|\cos x|}-9^{\sqrt{3}\sin x}}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 9^{2\sin x\cdot|\cos x|}-9^{\sqrt{3}\sin x}=0, \\ \operatorname{tg} x>0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 9^{2\sin x\cdot|\cos x|}=9^{\sqrt{3}\sin x}, \\ \operatorname{tg} x>0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\sin x\cdot|\cos x|=\sqrt{3}\sin x, \\ \operatorname{tg} x>0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin x\cdot\left(2|\cos x|-\sqrt{3}\right)=0, \\ \operatorname{tg} x>0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \cdot \left(2|\cos x| - \sqrt{3}\right) = 0, \\ \operatorname{tg} x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 0, \\ \operatorname{tg} x > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 2|\cos x| = \sqrt{3}, \\ \operatorname{tg} x > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} |\cos x| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \operatorname{tg} x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \operatorname{tg} x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Возможно, что кто-то захочет преобразовать первое уравнение системы к уравнению $\left(9^{\sin x}\right)^{2|\cos x|} = \left(9^{\sin x}\right)^{\sqrt{3}}$, *введёт новую переменную: пусть* $9^{\sin x} = t$, *тогда уравнение примет вид* $t^{2|\cos x|} = t^{\sqrt{3}}$, откуда $2|\cos x| = \sqrt{3}$. ***Неправильно!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!***

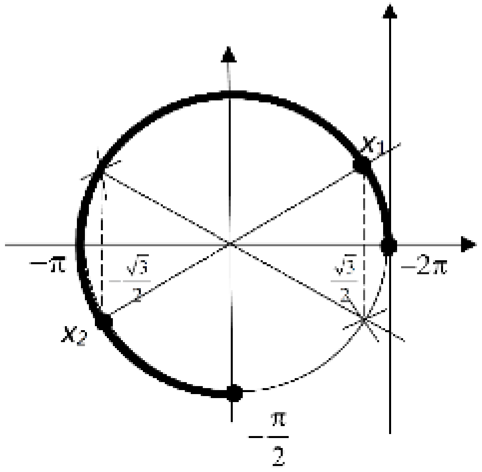
Причины: уравнение $t^{2|\cos x|} = t^{\sqrt{3}}$, где $t = 9^{\sin x}$, *не является показательным, техника решения показательных уравнений не применима;*

кроме этого, не стоит забывать, что ***0 в любой степени с положительным показателем – это 0*** *(0 нельзя возводить в нулевую степень и в степень с отрицательным показателем);*

1 в любой степени – это 1.

б) $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$

Отберём корни по тригонометрической окружности.



$$x_1 = -2\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6}$$

$$x_2 = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}.$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{11\pi}{6}; \quad -\frac{5\pi}{6}.$

15

Решите неравенство $\dfrac{27^x-9^{x+1}+3^{x+3}-27}{50x^2-110x+60,5}\geq 0$

Решение. Первый способ (преобразование неравенства по формулам сокращённого умножения)

$$\frac{27^x-9^{x+1}+3^{x+3}-27}{50x^2-110x+60,5}\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\left(\left(3^3\right)^x-9\cdot\left(3^2\right)^x+3^3\cdot 3^x-3^3\right)\cdot 2}{\left(50x^2-110x+60,5\right)\cdot 2}\geq 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{2\cdot\left(\left(3^x\right)^3-3\cdot\left(3^x\right)^2\cdot 3+3\cdot 3^x\cdot 3^2-3^3\right)}{100x^2-220x+121}\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2\left(3^x-3\right)^3}{\left(10x-11\right)^2}\geq 0.$$

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{2\left(3^x-3\right)^3}{\left(10x-11\right)^2}$.

Функция не определена при $x=1,1$, обращается в 0 при $x=1$.

$x\in\left[1;1,1\right)\cup\left(1,1;+\infty\right)$.

Ответ: $\left[1;1,1\right)\cup\left(1,1;+\infty\right)$.

Второй способ решения (преобразование числителя методом группировки)

$$\frac{27^x-9^{x-1}+3^{x-3}-27}{50x^2-110x+60,5}\geq 0 \iff \frac{\left(27^x-27\right)+\left(-9^{x+1}+3^{x+3}\right)}{2\left(50x^2-110x+60,5\right)}\geq\frac{0}{2} \iff \frac{\left(\left(3^3\right)^x-3^3\right)+\left(-9\cdot 9^x+3^3\cdot 3^x\right)}{100x^2-220x+121}\geq 0 \iff$$

$$\iff \frac{\left(\left(3^x\right)^3-3^3\right)+\left(-9\cdot\left(3^x\right)^2+3\cdot 9\cdot 3^x\right)}{\left(10x\right)^2-2\cdot 10x\cdot 11+11^2}\geq 0 \iff \frac{\left(3^x-3\right)\left(\left(3^x\right)^2+3\cdot 3^x+9\right)-9\cdot 3^x\left(3^x-3\right)}{\left(10x-11\right)^2}\geq 0 \iff$$

$$\iff \frac{\left(3^x-3\right)\left(\left(3^x\right)^2+3\cdot 3^x+9-9\cdot 3^x\right)}{\left(10x-11\right)^2}\geq 0 \iff \frac{\left(3^x-3\right)\left(\left(3^x\right)^2-6\cdot 3^x+9\right)}{\left(10x-11\right)^2}\geq 0 \iff \frac{\left(3^x-3\right)\left(3^x-3\right)^2}{\left(10x-11\right)^2}\geq 0 \iff$$

$$\iff \frac{\left(3^x-3\right)^3}{\left(10x-11\right)^2}\geq 0.$$

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{\left(3^x-3\right)^3}{\left(10x-11\right)^2}$.

Функция не определена при $x=1,1$, обращается в 0 при $x=1$.

$x\in\left[1;1,1\right)\cup\left(1,1;+\infty\right).$

Ответ: $\left[1;1,1\right)\cup\left(1,1;+\infty\right).$

Третий способ решения (с применением метода рационализации)

Метод рационализации

Если **решение неравенства организовано исключительно в области выполнения всех ограничений**, то сложные логарифмические, показательные, иррациональные **множители** можно заменить рациональными выражениями с *сохранением знака неравенства*. Полученное неравенство будет равносильно исходному, если замена выполняется по следующим правилам:

Исходный множитель	**Выражение, заменяющее исходный множитель**
$\log_{\varphi(x)} f(x) - \log_{\varphi(x)} g(x)$	$\left(f(x)-g(x)\right)\left(\varphi(x)-1\right)$
$\left(\varphi(x)\right)^{f(x)} - \left(\varphi(x)\right)^{g(x)}$	$\left(f(x)-g(x)\right)\left(\varphi(x)-1\right)$
$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$	$f(x)-g(x)$

PS *Теорему о рационализации применяем на ЕГЭ без дополнительных обоснований (не требуется доказывать равносильность исходного и получаемого неравенств). Применение теоремы ВНЕ области допустимых значений переменной является ошибкой (даже, если потом появится ссылка «с учётом ОДЗ …»).*

Решение

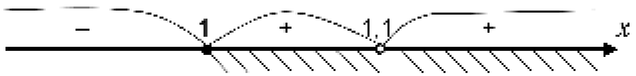
$$\frac{27^x-9^{x+1}+3^{x+3}-27}{50x^2-110x+60,5}\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\left(\left(3^3\right)^x-9\cdot\left(3^2\right)^x+3^3\cdot 3^x-3^3\right)\cdot 2}{\left(50x^2-110x+60,5\right)\cdot 2}\geq 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{2\cdot\left(\left(3^x\right)^3-3\cdot\left(3^x\right)^2\cdot 3+3\cdot 3^x\cdot 3^2-3^3\right)}{100x^2-220x+121}\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2\left(3^x-3\right)^3}{\left(10x-11\right)^2}\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}10x-11\neq 0,\\ \dfrac{2\left(x-1\right)^3\left(3-1\right)^3}{\left(10x-11\right)^2}\geq 0\end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x\neq 1{,}1,\\ \dfrac{2^4\left(x-1\right)^3}{\left(10x-11\right)^2}\geq 0.\end{cases}$$

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{2^4\left(x-1\right)^3}{\left(10x-11\right)^2}$ при $x\neq 1{,}1$.

$f(x)=0$ при $x=1$.



$x\in\left[1;\ 1{,}1\right)\cup\left(1{,}1;\ +\infty\right)$.

Ответ: $\left[1;\ 1{,}1\right)\cup\left(1{,}1;\ +\infty\right)$.

15 Решите неравенство $\frac{\log_2(2-x)-\log_2(x+1)}{\log_2^2 x^2+\log_2 x^4+1}\ge 0$

На первый взгляд кажется, что в знаменателе можно выполнить 2 красивых преобразования, которые позволят представить знаменатель как квадрат суммы двух выражений:

$$\log_2^2 x^2+\log_2 x^4+1=\left(\log_2 x^2\right)^2+4\log_2 x+1=\left(2\log_2 x\right)^2+4\log_2 x+1=$$

$$=4\log_2^2 x+4\log_2 x+1=\left(2\log_2 x+1\right)^2$$

К сожалению, это ошибочное мнение. Дважды допущена грубейшая ошибка!

$$\log_2 x^2\ne 2\log_2 x;\qquad \log_2 x^4\ne 4\log_2 x.$$

Доказать эти неравенства можно методом пробной точки. Первое неравенство: при $x=-4$ левая часть не теряет смысла и равна $\log_2(-4)^2=\log_2 16=4$, а правая принимает вид $2\log_2(-4)$ – не существует. Доказали, что существуют такие значения переменной, при которых левая и правая части не равны. Это означает, что $\log_2 x^2\ne 2\log_2 x.$ Аналогично доказывается и второе неравенство: $\log_2 x^4\ne 4\log_2 x.$

Запомним главный критерий возможности-невозможности преобразования ***в любом алгебраическом задании***:

- Если выполнение преобразования **СУЖАЕТ** область допустимых значений, то это преобразование **ВЫПОЛНЯТЬ НЕЛЬЗЯ**!

- Если выполнение преобразования **РАСШИРЯЕТ** область допустимых значений, то это преобразование **ВЫПОЛНИТЬ МОЖНО, НО ТОЛЬКО ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ РАССМОТРЕНИИ РЕЗУЛЬТАТА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОГРАНИЧЕНИЙ,** которым должна удовлетворять переменная (*устанавливаются по исходному неравенству (уравнению)*)

- Если область допустимых значений **НЕ ИЗМЕНЯЕТСЯ** при выполнении преобразования, то это преобразование **МОЖНО ВЫПОЛНЯТЬ**

Решите неравенство $\dfrac{\log_2(2-x)-\log_2(x+1)}{\log_2^2 x^2+\log_2 x^4+1}\geq 0$

Решение

$$\frac{\log_2(2-x)-\log_2(x+1)}{\log_2^2 x^2+\log_2 x^4+1}\geq 0;$$

$$\begin{cases} 2-x>0, \\ x+1>0, \\ x^2>0, \\ x^4>0, \\ \log_2^2 x^2+\log_2 x^4+1\neq 0, \\ \dfrac{\log_2(2-x)-\log_2(x+1)}{\left(\log_2 x^2\right)^2+\log_2\left(\left(x^2\right)^2\right)+1}\geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x<2, \\ x>-1, \\ x\neq 0, \\ \log_2^2 x^2+\log_2 x^4+1\neq 0, \\ \dfrac{\log_2(2-x)-\log_2(x+1)}{\left(\log_2 x^2\right)^2+2\cdot\log_2 x^2+1}\geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} -1<x<2, \\ x\neq 0, \\ \log_2 x^2+1\neq 0, \\ \dfrac{\log_2(2-x)-\log_2(x+1)}{\left(\log_2 x^2+1\right)^2}\geq 0. \end{cases}$$

При выполнении указанных ограничений знаменатель имеет смысл и при любых допустимых значениях x принимает только положительные значения. Поэтому система равносильна системам

$$\begin{cases} -1<x<2, \\ x\neq 0, \\ \log_2 x^2+1\neq 0, \\ \log_2(2-x)-\log_2(x+1)\geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} -1<x<2, \\ x\neq 0, \\ \log_2 x^2\neq -1, \\ \log_2(2-x)\geq\log_2(x+1); \end{cases} \qquad \begin{cases} -1<x<2, \\ x\neq 0, \\ x^2\neq 2^{-1}, \\ \log_2(x+1)\leq\log_2(2-x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 < x < 2, \\ x \neq 0, \\ x \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ 0 < x+1 \leq 2-x; \end{cases} \quad \begin{cases} -1 < x < 2, \\ x \neq 0, \\ x \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ 2x \leq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} -1 < x < 2, \\ x \neq 0, \\ x \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ x \leq \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} -1 < x \leq \frac{1}{2}, \\ x \neq 0, \\ x \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} -1 < x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0 \\ 0 < x \leq \frac{1}{2}. \end{array} \right.$$

Ответ: $\left(-1;\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ 0\right) \cup \left(0;\ \frac{1}{2}\right].$

PS В процессе решения соблюдаем следующие правила:

1) Все преобразования должны обеспечивать равносильность неравенств (систем неравенств), при этом знак равносильности может отсутствовать.
2) Логические преобразования необходимо прокомментировать, если отсутствует знак равносильности.
3) **Обратите внимание на правильное снятие знака логарифма:**

Исходное неравенство: $\log_2(x+1) \leq \log_2(2-x)$

Получаемое неравенство: $0 < x+1 \leq 2-x$, так как только в такой редакции исходное и получаемое неравенства равносильны.

ВНИМАНИЕ! Неравенство $x+1 \leq 2-x$ **НЕ РАВНОСИЛЬНО** исходному, нельзя так выполнить упрощение.

Чтобы **не потерять изолированные решения**, можно применить один из двух надёжных способов решения

Первый способ. Если очевидно, что промежутки знакопостоянства функции не будут чередоваться, то неравенство можно превратить в совокупность строгого неравенства и уравнения, решить неравенство, решить уравнение, ответы объединить.

Второй способ. Решение нестрого неравенства методом интервалов завершить двумя исследованиями: штриховкой выделить промежутки, в которых выполняется строгое неравенство, а затем повторно выделить точки, в которых функция принимает значение 0, и объединить ответы (так и было сделано в предложенном решении). Этот способ применим при решении *любого* нестрогого неравенства.

16

Клиент хочет сделать вклад на 3 года и выбирает между двумя банками:
- первый банк в конце каждого года планирует увеличивать сумму, имеющуюся на счёте в начале года, на 10%;
- второй банк – планирует увеличивать эту сумму в первый год на 4%, во второй год – на y%, а в третий – на $2y$%.

Найдите наименьшее целое кратное 5 число y, чтобы предложение второго банка по истечении трёх лет хранения вклада оказалось выгоднее предложения первого банка.

Решение. Пусть x рублей – сумма первоначального вклада в каждом банке.

	Первый банк		**Второй банк**	
Год	Сумма на счёте в начале года, рублей	Сумма на счёте в конце года, рублей	Сумма на счёте в начале года, рублей	Сумма на счёте в конце года, рублей
1-й	x	$1,1x$	x	$1,04x$
2-й	$1,1x$	$1,21x$	$1,04x$	$\frac{100+y}{100}\cdot 1,04x=\left(1+\frac{y}{100}\right)\cdot 1,04x$
3-й	$1,21x$	$1,331x$	$\left(1+\frac{y}{100}\right)\cdot 1,04x$	$\frac{100+2y}{100}\cdot\left(1+\frac{y}{100}\right)\cdot 1,04x=\left(1+\frac{2y}{100}\right)\left(1+\frac{y}{100}\right)\cdot 1,04x$

По условию задачи по истечении трёх лет хранения вклада оказалось выгоднее предложение второго банка. Тогда $\left(1+\frac{2y}{100}\right)\left(1+\frac{y}{100}\right)\cdot 1,04x>1,331x$.

Пусть $\frac{y}{100}=a$, тогда неравенство примет вид $(1+2a)(1+a)\cdot 1{,}04x>1{,}331x$.

По смыслу задачи $x>0$, тогда

$$(1+2a)(1+a)\cdot 1{,}04>1{,}331 \quad\Leftrightarrow\quad (1+2a)(1+a)\cdot 1040>1331 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(1+a+2a+2a^2\right)\cdot 1040>1331 \quad\Leftrightarrow\quad \left(1+3a+2a^2\right)\cdot 1040-1331>0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad 1040+3120a+2080a^2-1331>0 \quad\Leftrightarrow\quad 2080a^2+3120a-291>0.$$

Рассмотрим функцию $f(a)=2080a^2+3120a-291$.

$f(a)=0$, если $2080a^2+3120a-291=0$;

$$D=3120\cdot 3120+4\cdot 2080\cdot 291=4\cdot 4\cdot 195\cdot 4\cdot 130\cdot 6+4\cdot 4\cdot 4\cdot 130\cdot 291=4^3\cdot 130\cdot(195\cdot 6+291)=$$

$$=4^3\cdot 130\cdot 1461=4^3\cdot 189\,930=\left(8\sqrt{189\,930}\right)^2;$$

$$a_{1,2}=\frac{-3120\pm 8\sqrt{189\,930}}{2\cdot 2080}=\frac{8\cdot\left(-390\pm\sqrt{189\,930}\right)}{2\cdot 4\cdot 520}=\frac{-390\pm\sqrt{189\,930}}{520}.$$

$f(a)=2080a^2+3120a-291$ – квадратичная функция. График – парабола, ветви которой направлены вверх. Тогда $f(a)>0$, если

$$a<\frac{-390-\sqrt{189\,930}}{520} \quad\text{или}\quad a>\frac{-390+\sqrt{189\,930}}{520}.$$

Так как $a = \dfrac{y}{100} > 0$, то $a > \dfrac{-390 + \sqrt{189\,930}}{520}$;

$$\frac{y}{100} > \frac{-390 + \sqrt{189\,930}}{520} \quad \Leftrightarrow \quad y > \frac{-39000 + 100\sqrt{189\,930}}{520} \quad \Leftrightarrow \quad y > \frac{-3900 + 10\sqrt{189\,930}}{52} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad y > \frac{-1950 + 5\sqrt{189\,930}}{26} \quad \Leftrightarrow \quad y > \frac{-1950 + \sqrt{4\,748\,250}}{26}.$$

$$2179 < \sqrt{4\,748\,250} < 2180;$$

$$2179 - 1950 < -1950 + \sqrt{4\,748\,250} < 2180 - 1950;$$

$$229 < -1950 + \sqrt{4\,748\,250} < 230;$$

$$\frac{229}{26} < \frac{-1950 + \sqrt{4\,748\,250}}{26} < \frac{230}{26};$$

$$8\frac{21}{26} < \frac{-1950 + \sqrt{4\,748\,250}}{26} < 8\frac{22}{26}.$$

Так как y – целое число (по условию), то $y \geq 9$.

Наименьшее целое, кратное 5 значение y – это 10.

Ответ: наименьшее целое, кратное 5 значение y – это 10.

Особенности выполнения задания по теме «Вклады»

1. Сумму вклада в начале года принимаем за 100%. В конце года банк увеличивает сумму на r %, следовательно, в конце года сумма на счёте составляет (100 + r)% от суммы в начале года.

(100 + r)% от S рублей – это $\frac{100+r}{100}\cdot S$ рублей.

Особенность в том, что в полученном выражении нужно выполнить почленное деление: $\frac{100+r}{100}\cdot S=\left(1+\frac{r}{100}\right)\cdot S$. Это значительно упрощает работу с математической моделью.

2. При работе с математической моделью в большинстве случаев применяем метод введения новой переменной (метод замены): «Пусть $\frac{r}{100}=t$». Благодаря этому значительно уменьшаются числовые значения в математической модели.

16

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 25 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет погашен тремя равными платежами (то есть за три года) и общая сумма выплат после полного погашения кредита на 104 800 рублей больше суммы, взятой в кредит?

Анализируем условие. «Кредит будет погашен *тремя равными платежами*» – по условию. Понимаем: это аннуитетный платёж. Тогда наиболее простая математическая модель задачи получается, если следовать логике: долг до платежа (имеем ввиду, долг за несколько минут до платежа) → платёж → долг после платежа.

Чтобы рассчитать долг до платежа, можно рассчитать сумму увеличения долга (25% долга на конец предыдущего года) и прибавить её к долгу на конец года, упростить получившееся выражение. Это правильно, но затратно по времени (хотя некоторые обучающиеся считают этот способ самым понятным). Более быстрый способ расчёта – принять за 100% долг на конец года, присоединить к ним 25% (имеем право, так как банк увеличивает долг на 25% именно от долга на конец предыдущего года – то есть, от той же суммы) и рассчитать 125% от долга на конец предыдущего года. Это и есть долг до платежа.

Ещё один приём, позволяющий сократить затраты времени, – ввести буквенную символику для всех заданных числовых значений. Благодаря этому, выражения окажутся не громоздкими, понятными по смыслу.

Что следует иметь ввиду, решая экономическую задачу:

- каждое математическое выражение должно сопровождаться пояснением его смысла (более удобно это сделать в таблице),
- работу с математической моделью следует выполнять более подробно, не пропуская шаги решения,
- результат работы с математической моделью нужно интерпретировать (отразить его смысл).

Решение. Пусть S рублей планируется взять в кредит.

Пусть 125% = 1,25 = k.

Пусть x рублей – ежегодный платёж.

Тогда в соответствии с условием задачи имеем:

Год	Долг до платежа, рублей	Платёж, рублей	Долг после платежа, рублей
2020	-	-	S
2021	kS	x	$kS-x$
2022	$k(kS-x)=k^2S-kx$	x	$k^2S-kx-x$
2023	$k(k^2S-kx-x)=k^3S-k^2x-kx$	x	$k^3S-k^2x-kx-x=0$

Через 3 года кредит будет погашен, тогда $k^3S-k^2x-kx-x=0$.

Понимаем, что знаем значение k, но не знаем значения S и x, следовательно, из полученного уравнения нужно выразить S или x. И в одном, и в другом случае задача дальше хорошо решается. Более простое решение – если выразим S.

$$k^3S-k^2x-kx-x=0 \quad \Leftrightarrow \quad k^3S=k^2x+kx+x \quad \Leftrightarrow \quad S=\frac{k^2x+kx+x}{k^3},$$ так как $k=1,25\neq 0.$

Упростим, зная, что $k=1,25$ и $1,25\cdot 4=5.$

$$S=\frac{k^2x+kx+x}{k^3}=\frac{64k^2x+64kx+64x}{64k^3}=\frac{100x+80x+64x}{125}=\frac{244x}{125}.$$

$\frac{244x}{125}$ рублей взяли в кредит.

По условию задачи общая сумма выплат после полного погашения кредита на 104 800 рублей больше суммы, взятой в кредит, тогда

$$3x-\frac{244x}{125}=104\,800 \quad \Leftrightarrow \quad 375x-244x=125\cdot 104\,800 \quad \Leftrightarrow \quad 131x=125\cdot 104\,800 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x=125\cdot 800 \quad \Leftrightarrow \quad x=100\,000.$$

100 000 рублей – ежегодная выплата банку.

300 000 рублей будет выплачено банку.

Ответ: 300 000 рублей.

Математическая модель в этой задаче – это система двух уравнений, отражающих информацию «кредит погашен, то есть остаток долга равен 0» и «общая сумма выплат после полного погашения кредита на 104 800 рублей больше суммы, взятой в кредит». Можно модель оформить в виде системы, но проще составить первое уравнение и упростить его, выразить одну из переменных через другую, а затем составить второе уравнение, используя результат работы с первым уравнением (экономия времени составляет от 5 до 10 минут).

16 В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере S тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 30 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2027, 2028 и 2029 годов долг остаётся равным S тыс. рублей;
- выплаты в 2030 и 2031 годах равны по 338 тыс. рублей;
- к июлю 2031 года долг будет выплачен полностью.

Найдите общую сумму выплат за пять лет.

Анализируем условие. «В июле 2027, 2028 и 2029 годов долг остаётся равным S тыс. рублей» – по условию. Понимаем: важно знать, на сколько тысяч рублей банк увеличил долг, и именно эту сумму выплатить в 2027, 2028 и 2029 годах. Тогда наиболее простая математическая модель задачи получается, если следовать логике: на сколько тысяч рублей банк увеличил долг → платёж → долг после платежа.

Решение. S тысяч рублей планируется взять в кредит (по условию).

Пусть 30% = 0,3 = k.

Пусть 338 тыс. рублей = x тысяч рублей – выплаты в 2030 и 2031 годах.

Тогда в соответствии с условием задачи имеем:

Год	Банк увеличит долг на … тысяч рублей	Платёж, тысяч рублей	Долг после платежа, тысяч рублей
2026	-	-	S
2027	kS	kS	S
2028	kS	kS	S
2029	kS	kS	S
2030	kS	x	$S+kS-x$

2031	$k\left(S+kS-x\right)=kS+k^2S-kx$	x	$S+kS-x+kS+k^2S-kx-x=$ $=S+2kS+k^2S-kx-2x=0$

К июлю 2031 года долг будет выплачен полностью (по условию), тогда

$$S+2kS+k^2S-kx-2x=0; \qquad S=\frac{(k+2)x}{(1+k)^2}=\frac{(0,3+2)\cdot 338}{(1+0,3)^2}=\frac{2,3\cdot 338}{1,69}=\frac{230\cdot 338}{169}=230\cdot 2=460.$$

460 тысяч рублей планируется взять в кредит.

Общая сумма выплат составит $3kS+2x=3\cdot 0,3\cdot 460+2\cdot 338=1090$ тысяч рублей.

Ответ: 1090 тысяч рублей – общая сумма выплат за 5 лет.

16

Строительство нового завода стоит 159 млн. рублей. Затраты на производство *x* тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0,5x^2+2x+6$ млн. рублей в год. Если продукцию завода продать по цене *p* тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в миллионах рублей) за один год составит $px-\left(0,5x^2+2x+6\right)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При этом в первый год *p* = 10, а далее каждый год возрастает на 1. За сколько лет окупится строительство?

Решение. По условию *x* тыс. единиц продукции производят,

p тыс. рублей – стоимость единицы товара,

px млн. рублей – годовая выручка после продажи товара,

$\left(0,5x^2+2x+6\right)$ млн. рублей в год – затраты на производство,

$\left(px-\left(0,5x^2+2x+6\right)\right)$ млн. рублей в год – прибыль. По условию задачи она должна быть наибольшей.

Рассмотрим функцию $f\left(x\right)=px-\left(0,5x^2+2x+6\right)$, где p – фиксированное (в течение года) число, $x > 0$.

$$f\left(x\right)=px-0,5x^2-2x-6,$$

$$f\left(x\right)=-0,5x^2+\left(p-2\right)x-6.$$

Квадратичная функция. График – часть параболы (так как $x > 0$), ветви направлены вниз.

$x_0=\dfrac{-p+2}{2\cdot\left(-0,5\right)}=\dfrac{-p+2}{-1}=p-2$ – абсцисса вершины параболы.

Так как $p_{\text{наим.}}=10$, то $x_0>0$. Следовательно,

$$f_{\text{наиб.}}=f\left(x_0\right)=f\left(p-2\right)=-0,5\left(p-2\right)^2+\left(p-2\right)\cdot\left(p-2\right)-6=0,5\left(p-2\right)^2-6=\frac{\left(p-2\right)^2}{2}-6.$$

Следовательно, для того, чтобы прибыль была наибольшей, нужно выпускать в год $\left(p-2\right)$ тысяч единиц продукции. При этом прибыль составит $\left(\dfrac{\left(p-2\right)^2}{2}-6\right)$ млн. рублей.

Выясним, через сколько лет окупится строительство завода.

Год	Цена, тыс. рублей	Прибыль фирмы за год, млн рублей	Суммарная прибыль за весь период, млн рублей
1-й	10	$\frac{(10-2)^2}{2}-6=\frac{64}{2}-6=32-6=26$	26
2-й	11	$\frac{(11-2)^2}{2}-6=\frac{81}{2}-6=40,5-6=34,5$	60,5
3-й	12	$\frac{(12-2)^2}{2}-6=\frac{100}{2}-6=50-6=44$	104,5
4-й	13	$\frac{(13-2)^2}{2}-6=\frac{121}{2}-6=60,5-6=54,5$	159, что соответствует стоимости строительства завода

Следовательно, строительство завода окупится через 4 года.
Ответ: через 4 года.

Алгоритм решения задачи о строительстве

Шаг 1. Вводим функцию, численно равную годовой прибыли

Шаг 2. Исследуем функцию из шага 1 на наибольшее значение в области допустимых значений аргумента.

Обращаем внимание на значение аргумента, при котором функция принимает наибольшее значение, и на наибольшее значение функции.

Шаг 3. Интерпретируем результаты шага 2 (отражаем смысл полученного значения аргумента и полученного значения функции).

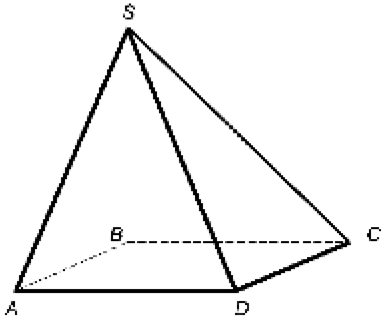
Шаг 4 зависит от задания. Выполняется в соответствии с условием задачи.

В задаче 4: подсчитывали ежегодную и суммарную прибыли фирмы, сравнивали их с затратами на строительство, узнали, за сколько лет окупится строительство.

14 Основанием пирамиды $SABCD$ является ромб $ABCD$ со стороной 6. Боковые грани SAB и SCB перпендикулярны плоскости основания и образуют между собой угол $150°$. Две другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом $60°$.

а) Докажите, что грани SAD и SCD равновеликие.

б) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



а) Доказательство

$$1)\left.\begin{array}{l}(SAB)\perp(ABC) \text{ (по условию)},\\ (SBC)\perp(ABC) \text{ (по условию)},\\ (SAB)\cap(SBC)=SB\end{array}\right| \Rightarrow SB\perp(ABC).$$

$$2)\left.\begin{array}{l}SB\perp(ABC)\\ AB\subset(ABC)\end{array}\right| \Rightarrow SB\perp AB,\quad \angle SBA=90°.$$

$$3)\left.\begin{array}{l}SB\perp(ABC)\\ BC\subset(ABC)\end{array}\right| \Rightarrow SB\perp BC,\quad \angle SBC=90°.$$

4) Рассмотрим треугольники SBA и SBC:

$$\left.\begin{array}{l}\angle SBA=\angle SBC=90°,\\ SB - \text{ общий катет},\\ AB=BC \text{ как стороны ромба } ABCD.\end{array}\right| \Rightarrow \Delta SBA=\Delta SBC.$$

$$\Delta SBA=\Delta SBC\,\Big|\Rightarrow SA=SC.$$

5) Рассмотрим треугольники SDA и SDC:

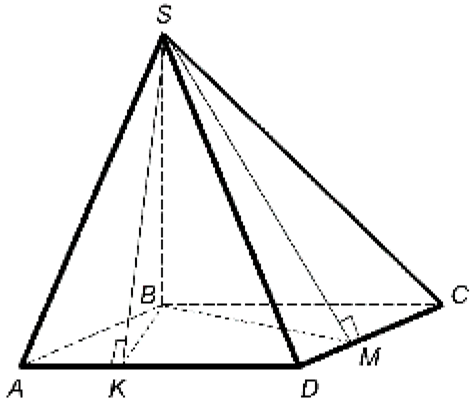
$$\left.\begin{array}{l}SA=SC,\\ SD - \text{ общая сторона},\\ AD=DC \text{ как стороны ромба } ABCD.\end{array}\right| \Rightarrow \Delta SAD=\Delta SCD.$$

6) Треугольники SAD и ΔSCD равны, следовательно, и их площади равны, треугольники SAD и ΔSCD равновеликие. Утверждение доказано.

б) Решение

$$\left.\begin{array}{l} 7)\ (SAB)\cap(SBC)=SB, \\ \quad AB\subset(SAB), \\ \quad AB\perp SB \text{ (из действия 1)}, \\ \quad BC\subset(SBC), \\ \quad BC\perp SB \text{ (из действия 2)} \end{array}\right| \Rightarrow \angle ABC - \text{линейный угол двугранного угла,}$$

образованного боковыми гранями SAB и SBC пирамиды.



8) Боковые грани SAB и SBC образуют между собой угол 150° (по условию),

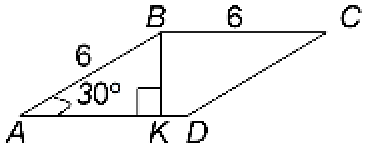
$\angle ABC$ – линейный угол двугранного угла, образованного боковыми гранями SAB и SBC, тогда $\angle ABC = 150°$.

9) Дополнительное построение: $SK\perp AD$, $K\in AD$, $SM\perp CD$, $M\in CD$.

$$\left.\begin{array}{l} 10)\ SB\perp(ABC), \\ SK - \text{наклонная}, \\ BK - \text{её проекция}, \\ AD\in(ABC), \\ AD\perp SK \end{array}\right| \Rightarrow AD\perp BK \text{ (по теореме о трёх перпендикулярах).}$$

Следовательно, BK – высота ромба $ABCD$.

$$\left.\begin{array}{l} 11)\ ABCD - \text{ромб (по условию)}, \\ \left.\angle ABC = 150° \text{ (из действия 8)}\right| \Rightarrow \angle A = 30°, \\ BK - \text{высота ромба } ABCD, \\ AB = 6 \text{ (по условию)} \end{array}\right| \Rightarrow BK = 3.$$



12) $(SAD)\cap(ABC)=AD$,
$SK\subset(SAD)$,
$SK\perp AD$ (из действия 9),
$BK\subset(ABC)$,
$BK\perp AD$ (из действия 10)

$\Rightarrow \angle SKB$ – линейный угол двугранного угла, образованного гранями SAD и ABC пирамиды $SABCD$.

13) Грани SAD и ABC образуют между собой угол $60°$ (по условию),
$\angle SKB$ – линейный угол двугранного угла, образованного гранями SAD и ABC, тогда $\angle SKB = 60°$.

14) $\operatorname{tg} SKB = \dfrac{SB}{BK}$,

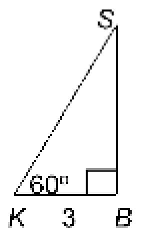
$\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3} = \dfrac{SB}{3}$,

$SB = 3\sqrt{3}$.

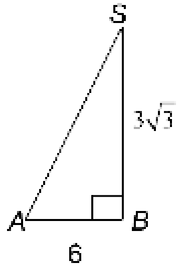
$\cos SKB = \dfrac{BK}{SK}$,

$\cos 60° = \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{SK}$,

$SK = 6$.

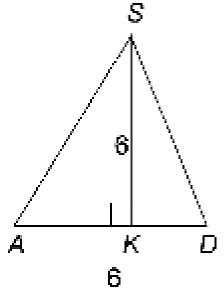


15) Треугольники SBA и SBC равны (из действия 4), следовательно,
грани SBA и SBC равновеликие.
Грани SAD и SCD равновеликие (доказано в задаче а).



Тогда $S_{бок.} = 2\left(S_{\Delta SBA}+S_{\Delta SAD}\right) = 2\cdot\left(\dfrac{1}{2}SB\cdot AB+\dfrac{1}{2}AD\cdot SK\right) = SB\cdot AB + AD\cdot SK =$

$= 3\sqrt{3}\cdot 6 + 6\cdot 6 = 36+18\sqrt{3}$.



Ответ: а) доказано;

б) площадь боковой поверхности пирамиды равна $36+18\sqrt{3}$.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

ЖЕЛАЮ УСПЕХА!

ПАНИНА Н.А.