

Интенсив «Решение заданий
повышенного и высокого уровня сложности»



**Решение
экономических задач
(оптимизация)**

Панина Н. А.,
учитель математики
МБОУ СШ № 33,
г. Смоленск

2025-2026 учебный год



Анонс занятия

Задание 1. Тема «Ценные бумаги». Найти: положительные значения t , удовлетворяющие заданному условию. Особенность: известен год оптимальной продажи ценных бумаг.

Задание 2. Задача, аналогичная предыдущей, для самостоятельного решения. Элементы самоконтроля: модель и ответ.

Задание 3. Тема «Ценная бумага». Найти: год, в который нужно продать ценную бумагу. Задание выполнено двумя способами:

- оптимизация с помощью производной (логическая цепочка: функция целочисленного аргумента $\rightarrow$ соответствующая ей непрерывная функция $\rightarrow$ нахождение критических и стационарных точек непрерывной функции $\rightarrow$ соответствующие точки целочисленной функции $\rightarrow$ нахождение наибольшего значения целочисленной функции),
- обеспечение максимальной выгоды без применения приёмов оптимизации с помощью производной функции.

Особенность: стационарная точка непрерывной функции не является целочисленным значением.

Задание 4. Тема: «Строительство завода». Найти: за сколько лет окупится строительство. Особенность: необходимо найти объём производства (продаж) и вести расчёт суммарной прибыли, сравнивая её значения с затратами на строительство.

Задание 5. Тема: «Строительство завода». Найти: наименьшую цену товара, позволяющую окупить строительство в установленные сроки. Особенность: чтобы составить модель (неравенство) необходимо найти объём производства (продаж) и суммарную прибыль.

Задание 6. Тема: «Оптимизация налога». Найти: наибольший налог на единицу продукции. Особенности: 1) оптимизация проводится дважды: оптимизируем прибыль фирмы, оптимизируем налог на продукцию, 2) отслеживаем выполнение ограничений, установленных условием задачи.

Задание 7. Тема: «Выпуск продукции двумя заводами». Найти: наибольшее количество единиц продукции, которое заводы могут произвести за неделю. Особенности: 1) смысл математической символики в условии задачи, 2) сведение решения задачи к одной переменной, 3) форма математической модели, 4) работа с математической моделью (переход от дискретной функции к непрерывной и возвращение к дискретной функции).

Задание 8. Тема: «Выпуск продукции двумя заводами». Найти: сумму денег, необходимую для оплаты труда рабочих. Особенность: 1) задача, обратная заданию 7, 2) усложняются исходные зависимости в условии задачи.

Задание 9. Тема: «Распределение рабочих по двум объектам». Найти: как нужно распределить рабочих, чтобы затраты на заработную плату оказались минимальными, чему равна наименьшая суммарная суточная зарплата. Особенность: оптимизация целочисленной функции, ограничения, исследование абсциссы вершины параболы на принадлежность области допустимых значений, исследование получаемых значений на целочисленность.

В некоторых случаях решения будут прерываться комментариями автора. Они выделены фиолетовым цветом. В развёрнутом ответе, конечно же, эти фрагменты прописывать не нужно.



ПАМЯТКА

«ЧТО СЛЕДУЕТ ИМЕТЬ ВВИДУ, РЕШАЯ ЭКОНОМИЧЕСКУЮ ЗАДАЧУ С РАЗВЁРНУТЫМ ОТВЕТОМ»

1. Каждое математическое выражение должно сопровождаться пояснением его смысла (в задачах на вклады, кредиты это более удобно сделать в таблице).
2. Работу с математической моделью следует выполнять более подробно, не пропуская шаги решения.
3. Если необходимо провести исследование функции с помощью производной (нет более простого способа исследования), а имеем функцию целочисленного аргумента, то функции целочисленного аргумента нужно поставить в соответствие непрерывную функцию (на каком множестве?), провести исследование непрерывной функции, а затем результат перенести на функцию целочисленного аргумента.
4. Результат работы с математической моделью нужно интерпретировать (отразить его смысл). Исключение: задачи, в которых требуется найти значение буквенной переменной, заданной условием задачи.



Источник задания: банк ФИПИ Номер: 89F37B

<https://ege.fipi.ru/bank/index.php?proj=AC437B34557F88EA4115D2F374B0A07B>

1. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года t ($t = 1; 2; \dots$). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться в $1+r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счёте была наибольшей. Расчёты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных значениях r это возможно?

Решение. 1) Найдём сумму на счёте в банке в конце 25-го года при условии, что ценные бумаги продали в конце 21-го года.

Год	Сумма на счёте в начале года, тыс. рублей	Сумма на счёте в конце года, тыс. рублей
22-й	$21^2 = 441$	$441(1 + r)$
23-й	$441(1 + r)$	$441(1 + r)^2$
24-й	$441(1 + r)^2$	$441(1 + r)^3$
25-й	$441(1 + r)^3$	$441(1 + r)^4$

$441(1 + r)^4$ тыс. рублей – сумма на счёте в конце 25-го года, если продать ценные бумаги в конце 21-го года.

Она должна быть наибольшей (по условию задачи). Следовательно, она больше, чем сумма, которая оказалась бы на счёте при продаже ценных бумаг в конце 20-го года и больше, чем сумма при продаже ценных бумаг в конце 22-го года.

2) Найдём суммы, которые оказались бы на счёте, если бы ценные бумаги продали в конце 20-го или в конце 22 года, и составим модель.

Год	Сумма на счёте в начале года, тыс. рублей	Сумма на счёте в конце года, тыс. рублей
21-й	$20^2 = 400$	$400(1 + r)$
22-й	$400(1 + r)$	$400(1 + r)^2$
23-й	$400(1 + r)^2$	$400(1 + r)^3$
24-й	$400(1 + r)^3$	$400(1 + r)^4$
25-й	$400(1 + r)^4$	$400(1 + r)^5$

Год	Сумма на счёте в начале года, тыс. рублей	Сумма на счёте в конце года, тыс. рублей
23-й	$22^2 = 484$	$484(1 + r)$
24-й	$484(1 + r)$	$484(1 + r)^2$
25-й	$484(1 + r)^2$	$484(1 + r)^3$

Тогда $441(1 + r)^4 > 400(1 + r)^5$ и $441(1 + r)^4 > 484(1 + r)^3$.

Так как $1 + r > 0$, то имеем:

$$\begin{cases} 400(1+r) < 441, \\ 441(1+r) > 484; \end{cases} \begin{cases} 1+r < \frac{441}{400}, \\ 1+r > \frac{484}{441}; \end{cases} \begin{cases} r < \frac{441}{400} - 1, \\ r > \frac{484}{441} - 1; \end{cases} \begin{cases} r < \frac{41}{400}, \\ r > \frac{43}{441}; \end{cases} \quad \frac{43}{441} < r < \frac{41}{400}.$$

3) Обозначим S_k – сумму (в тыс. рублей) на банковском счёте в конце 25-го года, полученную при условии, что ценные бумаги продали в конце k -го года.

$$\text{Тогда } S_k = k^2(1+r)^{25-k}, \quad S_{k+1} = (k+1)^2(1+r)^{25-(k+1)} = (k+1)^2(1+r)^{24-k}.$$

Выясним, при каких натуральных значениях k , принадлежащих множеству $\{1; 2; \dots; 23; 24\}$, верно неравенство $S_{k+1} - S_k > 0$, где $\frac{43}{441} < r < \frac{41}{400}$, и при каких k верно неравенство $S_{k+1} - S_k < 0$.

$$\begin{aligned} S_{k+1} - S_k &= \frac{(k+1)^2(1+r)^{24}}{(1+r)^k} - \frac{k^2(1+r)^{25}}{(1+r)^k} = \frac{(k+1)^2(1+r)^{24} - k^2(1+r)^{25}}{(1+r)^k} = \\ &= \frac{(1+r)^{24}((k+1)^2 - k^2(1+r))}{(1+r)^k} = \frac{(1+r)^{24}(k^2 + 2k + 1 - k^2 - k^2r)}{(1+r)^k} = \frac{(1+r)^{24}(2k + 1 - k^2r)}{(1+r)^k}. \end{aligned}$$

Так как $1 + r > 0$, то знак разности $S_{k+1} - S_k$ совпадает со знаком выражения $2k + 1 - k^2 r$. Оценим значения выражения $2k + 1 - k^2 r$.

$$\frac{43}{441} < r < \frac{41}{400},$$

$$-\frac{43}{441}k^2 > -k^2 r > -\frac{41}{400}k^2,$$

$$-\frac{41k^2}{400} < -k^2 r < -\frac{43k^2}{441},$$

$$2k + 1 - \frac{41k^2}{400} < 2k + 1 - k^2 r < 2k + 1 - \frac{43k^2}{441}.$$

$$2k + 1 - k^2 r > 0 \text{ (тогда и } S_{k+1} - S_k > 0), \text{ если } 2k + 1 - \frac{41k^2}{400} \geq 0, \text{ т.е. } 2 \cdot 20^2 k + 20^2 - 41k^2 \geq 0; \quad (1)$$

$$2k + 1 - k^2 r < 0 \text{ (тогда и } S_{k+1} - S_k < 0), \text{ если } 2k + 1 - \frac{43k^2}{441} \leq 0, \text{ т.е. } 2 \cdot 21^2 k + 21^2 - 43k^2 \leq 0, \quad (2)$$

где k – натуральное число, $k \in \{1; 2; \dots; 23; 24\}$.

Неравенствам (1) и (2) поставим в соответствие неравенства $2 \cdot 20^2 x + 20^2 - 41x^2 \geq 0$ и $2 \cdot 21^2 x + 21^2 - 43x^2 \leq 0$, определённые на множестве действительных чисел. Заметим, что каждое натуральное решение из множества $x \in [1; 24]$ окажется решением и исходного неравенства.

$$2 \cdot 20^2 x + 20^2 - 41x^2 \geq 0;$$

$$41x^2 - 2 \cdot 20^2 x - 20^2 \leq 0.$$

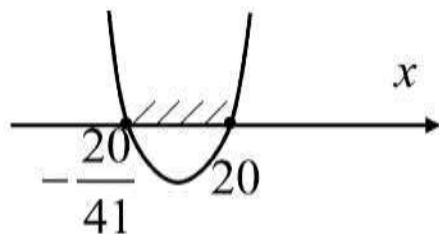
$$41x^2 - 2 \cdot 20^2 x - 20^2 = 0$$

$$D = 4 \cdot 20^4 + 4 \cdot 41 \cdot 20^2 = 4 \cdot 20^2 (20^2 + 41) =$$

$$= 4 \cdot 20^2 \cdot 441 = (2 \cdot 20 \cdot 21)^2;$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \cdot 20^2 \pm 2 \cdot 20 \cdot 21}{2 \cdot 41} = \frac{20(20 \pm 21)}{41};$$

$$x_1 = -\frac{20}{41}; \quad x_2 = 20.$$



$$x \in \left[-\frac{20}{41}; 20 \right]$$

$$2 \cdot 21^2 x + 21^2 - 43x^2 \leq 0;$$

$$43x^2 - 2 \cdot 21^2 x - 21^2 \geq 0.$$

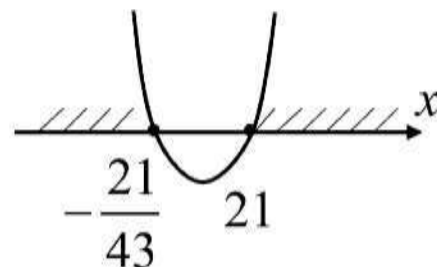
$$43x^2 - 2 \cdot 21^2 x - 21^2 = 0$$

$$D = 4 \cdot 21^4 + 4 \cdot 43 \cdot 21^2 = 4 \cdot 21^2 (21^2 + 43) =$$

$$= 4 \cdot 21^2 \cdot 484 = (2 \cdot 21 \cdot 22)^2;$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \cdot 21^2 \pm 2 \cdot 21 \cdot 22}{2 \cdot 43} = \frac{21(21 \pm 22)}{43};$$

$$x_1 = -\frac{21}{43}; \quad x_2 = 21.$$



$$x \in \left(-\infty; -\frac{21}{43} \right] \cup [21; +\infty)$$

Следовательно, $S_{k+1} > S_k$ при $k = 1; 2; \dots; 20$ и $S_{k+1} < S_k$ при $k = 21; 22; 23; 24$,
то есть $S_1 < S_2 < S_3 < \dots < S_{19} < S_{20} < S_{21}$ и $S_{25} < S_{24} < S_{23} < S_{22} < S_{21}$.

Следовательно, если $\frac{43}{441} < r < \frac{41}{400}$, то S_{21} – наибольшее значение суммы на банковском счёте, что соответствует условию задачи.

Ответ: $\frac{43}{441} < r < \frac{41}{400}$.

Алгоритм решения задачи про ценные бумаги, если известен год продажи ценных бумаг

Шаг 1. Найти сумму на счёте в банке, если продать ценные бумаги в указанный год.

Шаг 2. Найти суммы на счёте в банке, если продавать ценные бумаги на год раньше, на год позже указанного в условии года продажи.

Шаг 3. Составить математическую модель задачи: сумма из шага 1 больше сумм из шага 2 (система двух неравенств).

Шаг 4. Решить систему из шага 3.

Шаг 5. Доказать (в общем виде), что сумма из шага 1 больше суммы на счёте в банке в ЛЮБОЙ другой год продажи при условии выполнения результата шага 4.

Шаг 6. Сформулировать ответ.



Источник задания: банк ФИПИ Номер: DBAF65

<https://ege.fipi.ru/bank/index.php?proj=AC437B34557F88EA4115D2F374B0A07B>

2. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят 2^t тыс. рублей в конце года t ($t = 1; 2; \dots$). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться в $1+r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцатого года сумма на его счёте была наибольшей. Расчёты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце девятого года. При каких положительных значениях r это возможно?

Задача аналогичная предыдущей.

Для самостоятельного решения.

Модель:
$$\begin{cases} 81(1+r)^{11} > 64(1+r)^{12}, \\ 81(1+r)^{11} > 100(1+r)^{10} \end{cases}$$

Ответ: $\frac{19}{81} < r < \frac{17}{64}$.



Источник задания: банк ФИПИ Номер: DFEFEE

<https://ege.fipi.ru/bank/index.php?proj=AC437B34557F88EA4115D2F374B0A07B>

3. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года t ($t = 1; 2; \dots$). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться на 25%. В конце какого года пенсионному фонду следует продать ценные бумаги, чтобы в конце двадцатого года сумма на его счёте была наибольшей?

Решение (*первый способ*). Пусть пенсионный фонд продаст ценные бумаги в конце n -го года, тогда n^2 тыс. рублей будут стоить ценные бумаги в момент продажи, такую сумму пенсионный фонд положит в банк, $n^2 \cdot 1,25^{20-n}$ тыс. рублей окажется на счёте в конце 20-го года. По условию задачи эта сумма должна быть наибольшей.

Математическая модель задачи: исследовать функцию $f(n) = n^2 \cdot 1,25^{20-n}$ на наибольшее значение на промежутке $[0; 20]$.

Так как функция является дискретной (а, следовательно, недифференцируемой), то функции $f(n) = n^2 \cdot 1,25^{20-n}$ поставим в соответствие непрерывную функцию $y = x^2 \cdot 1,25^{20-x}$, определённую на множестве $(0; +\infty)$.

$$y' = (x^2)' \cdot 1,25^{20-x} + x^2 \cdot (1,25^{20-x})',$$

$$y' = 2x \cdot 1,25^{20-x} + x^2 \cdot 1,25^{20-x} \cdot \ln 1,25 \cdot (20-x)',$$

$$y' = 2x \cdot 1,25^{20-x} - x^2 \cdot 1,25^{20-x} \cdot \ln 1,25,$$

$$y' = x \cdot 1,25^{20-x} \cdot (2 - x \cdot \ln 1,25).$$

На промежутке $(0; +\infty)$ нет таких x , в которых производная не существует.

На промежутке $(0; +\infty)$ производная равна 0 в точке $\frac{2}{\ln(1,25)}$, т.е. $\log_{1,25} e^2$.

Значение $\log_{1,25} e^2$ не является целым числом, оно расположено между последовательными целыми числами 8 и 9, так как $1,25^8 < 5,96 < e^2$, но $1,25^9 > 7,45 > e^2$.

Следовательно, чтобы найти наибольшее значение функции $f(n)$ на промежутке $[0; 20]$, нужно сравнить значения функции $f(n) = n^2 \cdot 1,25^{20-n}$ в точках 0, 8, 9 и 20.

$$f(0) = 0;$$

$$f(8) = 64 \cdot 1,25^{12} = 64 \cdot 1,25 \cdot 1,25^{11} = 80 \cdot 1,25^{11};$$

$$f(9) = 81 \cdot 1,25^{11};$$

$$f(20) = 400.$$

Наибольшее значение функция $f(n) = n^2 \cdot 1,25^{20-n}$ принимает в точке 9, следовательно, пенсионный фонд должен продать ценные бумаги в конце 9-го года.

Ответ: в конце 9-го года.

Решение (второй способ). Предположим, что ценные бумаги пенсионный фонд продаст в конце n -го года потому, что в течение первых n лет хранение бумаг в фонде приносило бóльшую прибыль, чем хранение на банковском счёте, а начиная с $(n+1)$ -го года более выгодным становится хранение денег на банковском счёте.

Так как каждый год прибыль оказывается наибольшей, то и сумма на счёте в конце 20-го года будет наибольшей. Тогда

Год	Пенсионный фонд	Банк	
	Стоимость ценных бумаг на конец года, тыс. рублей	Сумма на начало года, тыс. рублей	Сумма на конец года, тыс. рублей
n - й	n^2	-	-
$(n+1)$ -й	$(n+1)^2$	n^2	$1,25 n^2$

Так как сумма на банковском счёте больше, то $1,25n^2 > (n+1)^2$.

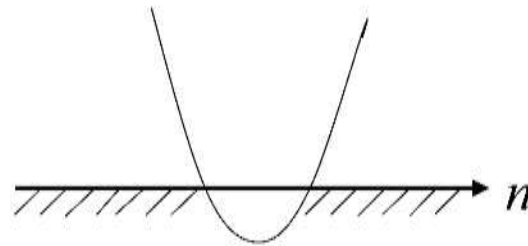
$$1,25n^2 > (n+1)^2 \Leftrightarrow 1,25n^2 > n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow 0,25n^2 - 2n - 1 > 0 \Leftrightarrow n^2 - 8n - 4 > 0.$$

$$y = n^2 - 8n - 4$$

$$n^2 - 8n - 4 = 0;$$

$$D = 64 + 16 = 80 = 16 \cdot 5;$$

$$n_{1,2} = \frac{8 \pm 4\sqrt{5}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{5}$$



$$n < 4 - 2\sqrt{5} \quad \text{или} \quad n > 4 + 2\sqrt{5}.$$

По смыслу задачи $n > 0$, тогда $n > 4 + 2\sqrt{5}$, то есть $n > 4 + \sqrt{20}$.

Наименьшее целое положительное значение n , являющееся решением неравенства, – это 9.

В конце 9-го года нужно продать ценные бумаги.

Ответ: в конце 9-го года.



Источник задания: <https://math-ege.sdamgia.ru/test?id=87772429>

4. Строительство нового завода стоит 159 млн. рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + 2x + 6$ млн. рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в миллионах рублей) за один год составит $px - (0,5x^2 + 2x + 6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При этом в первый год $p = 10$, а далее каждый год возрастает на 1. За сколько лет окупится строительство?

Решение. По условию x тыс. единиц продукции производят,
 p тыс. рублей – стоимость единицы товара,
 px млн. рублей – годовая выручка после продажи товара,
 $(0,5x^2 + 2x + 6)$ млн. рублей в год – затраты на производство,
 $(px - (0,5x^2 + 2x + 6))$ млн. рублей в год – прибыль. По условию задачи она должна быть наибольшей.

Рассмотрим функцию $f(x) = px - (0,5x^2 + 2x + 6)$, где p – фиксированное (в течение года) число, $x > 0$.

$$f(x) = px - 0,5x^2 - 2x - 6,$$

$$f(x) = -0,5x^2 + (p-2)x - 6.$$

Квадратичная функция. График – часть параболы (так как $x > 0$), ветви направлены вниз. $x_0 = \frac{-p+2}{2 \cdot (-0,5)} = \frac{-p+2}{-1} = p-2$ – абсцисса вершины параболы.

Так как $p_{\text{наим.}} = 10$, то $x_0 > 0$. Следовательно,

$$f_{\text{наиб.}} = f(x_0) = f(p-2) = -0,5(p-2)^2 + (p-2) \cdot (p-2) - 6 = 0,5(p-2)^2 - 6 = \frac{(p-2)^2}{2} - 6.$$

Следовательно, для того, чтобы прибыль была наибольшей, нужно выпускать в год $(p-2)$ тысяч единиц продукции. При этом прибыль составит $\left(\frac{(p-2)^2}{2} - 6 \right)$ млн. рублей.

Выясним, через сколько лет окупится строительство завода.

Год	Цена, тыс. рублей	Прибыль фирмы за год, млн рублей	Суммарная прибыль за весь период, млн рублей
1-й	10	$\frac{(10-2)^2}{2} - 6 = \frac{64}{2} - 6 = 32 - 6 = 26$	26
2-й	11	$\frac{(11-2)^2}{2} - 6 = \frac{81}{2} - 6 = 40,5 - 6 = 34,5$	60,5

3-й	12	$\frac{(12-2)^2}{2} - 6 = \frac{100}{2} - 6 = 50 - 6 = 44$	104,5
4-й	13	$\frac{(13-2)^2}{2} - 6 = \frac{121}{2} - 6 = 60,5 - 6 = 54,5$	159, что соответствует стоимости строительства завода

Следовательно, строительство завода окупится через 4 года.

Ответ: через 4 года.

Алгоритм решения задачи о строительстве

Шаг 1. Вводим функцию, численно равную годовой прибыли

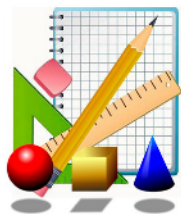
Шаг 2. Исследуем функцию из шага 1 на наибольшее значение в области допустимых значений аргумента.

Обращаем внимание на значение аргумента, при котором функция принимает наибольшее значение, и на наибольшее значение функции.

Шаг 3. Интерпретируем результаты шага 2 (отражаем смысл полученного значения аргумента и полученного значения функции).

Шаг 4 зависит от задания. Выполняется в соответствии с условием задачи.

В задаче 4: подсчитывали ежегодную и суммарную прибыли фирмы, сравнивали их с затратами на строительство, узнали, за сколько лет окупится строительство.



Источник задания: https://math-ege.sdamgia.ru/test?category_id=247&filter=all

5. Строительство нового завода стоит 78 млн. рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + 2x + 6$ млн. рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в миллионах рублей) за один год составит $px - (0,5x^2 + 2x + 6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более, чем за 3 года?

Решение. По условию задачи x тыс. единиц продукции производят,
 p тыс. рублей – стоимость единицы товара,
 px млн. рублей – годовая выручка после продажи товара,
 $(0,5x^2 + 2x + 6)$ млн. рублей в год – затраты на производство,
 $(px - (0,5x^2 + 2x + 6))$ млн. рублей в год – прибыль. Упростим выражение:

$$px - (0,5x^2 + 2x + 6) = -0,5x^2 + (p - 2)x - 6.$$

По условию задачи прибыль должна быть наибольшей.

Рассмотрим функцию $y = -0,5x^2 + (p-2)x - 6$ и выясним, при каком значении x она принимает наибольшее значение. По условию задачи это значение x выражает количество продукции, выпускаемой за год, и обеспечивающей наибольшую годовую прибыль.

Функция $y = -0,5x^2 + (p-2)x - 6$ – квадратичная. Наибольшее значение она принимает в точке x_0 , где x_0 – абсцисса вершины параболы.

$$x_0 = \frac{-(p-2)}{2 \cdot (-0,5)} = \frac{-(p-2)}{-1} = p-2.$$

Чтобы обеспечить наибольшую прибыль, завод должен выпускать $(p-2)$ тысяч единиц продукции в год.

Тогда годовая прибыль будет равна $-0,5(p-2)^2 + (p-2) \cdot (p-2) - 6$, то есть $(0,5(p-2)^2 - 6)$ млн рублей.

Прибыль за 3 года составит $3(0,5(p-2)^2 - 6)$ млн рублей. И это не менее 78 млн рублей (по условию).

$$3(0,5(p-2)^2 - 6) \geq 78;$$

$$0,5(p-2)^2 - 6 \geq 26;$$

$$0,5(p-2)^2 \geq 32;$$

$$(p-2)^2 \geq 64;$$

$$\begin{cases} p-2 \leq -8 \\ p-2 \geq 8; \end{cases} \quad \begin{cases} p \leq -6 \\ p \geq 10. \end{cases}$$

По смыслу задачи $p > 0$, тогда $p \geq 10$, $p_{\text{наим.}} = 10$.

Ответ: наименьшее значение p равно 10.

Задачи 4 и 5 – обратные задачи. При решении задачи 5 шаги 1-3 не изменились (**Шаг 1.** Ввели функцию, численно равную годовой прибыли.

Шаг 2. Исследовали функцию из шага 1 на наибольшее значение в области допустимых значений аргумента. Обратили внимание на значение аргумента, при котором функция принимает наибольшее значение.

Шаг 3. Наделили смыслом полученное значение аргумента и рассчитали годовую прибыль).

Шаг 4 был иным, чем в задаче 4. В соответствии с условием задачи исследовали, при каких значениях p годовая прибыль будет удовлетворять заданному ограничению.



Источник задания: https://math-ege.sdangia.ru/test?category_id=247&filter=all

6. Зависимость количества Q (в шт., $0 \leq Q \leq 20\,000$) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 20\,000 - P$. Затраты на производство Q единиц товара составляют $6000Q + 4\,000\,000$ рублей. Кроме затрат на производство, фирма должна платить налог t рублей ($0 < t < 10\,000$) с каждой произведённой единицы товара. Таким образом, прибыль фирмы составляет $PQ - 6000Q - 4\,000\,000 - tQ$ рублей, а общая сумма налогов, собранных государством, равна tQ рублей. Фирма производит такое количество товара, при котором её прибыль максимальна. При каком значении t общая сумма налогов, собранных государством, будет максимальной?

Анализ условия: общая сумма налогов равна tQ рублей. Следовательно, переменные t и Q должны сохраниться в выражениях, составленных по тексту задачи, а переменную P нужно выразить из заданного равенства.

Решение. Q единиц товара производит и продаёт фирма,
 $6000Q + 4\,000\,000$ рублей – затраты на их производство,
 tQ рублей – налоговый сбор,

P рублей – цена одной единицы товара, причём численно P равняется $20\,000 - Q$, так как $Q = 20\,000 - P$ (по условию),

PQ , то есть $(20\,000 - Q)Q$ рублей – выручка от продажи товара,

$((20\,000 - Q)Q - 6000Q - 4\,000\,000 - tQ)$ рублей – прибыль фирмы. Упростим выражение:

$$\begin{aligned}(20\,000 - Q)Q - 6000Q - 4\,000\,000 - tQ &= 20\,000Q - Q^2 - 6000Q - 4\,000\,000 - tQ = \\ &= -Q^2 + (14\,000 - t)Q - 4\,000\,000\end{aligned}$$

По условию задачи фирма производит такое количество товара, что прибыль является максимальной.

Рассмотрим функцию $y = -Q^2 + (14\,000 - t)Q - 4\,000\,000$, значения которой указывают на сумму прибыли. Это квадратичная функция, графиком которой является парабола, её ветви направлены вниз. Тогда $y_{\text{наиб.}} = y(Q_0)$, где Q_0 –

абсцисса вершины параболы. $Q_0 = \frac{-(14\,000 - t)}{2 \cdot (-1)} = 7000 - \frac{t}{2}$.

По условию задачи $0 < t < 10\,000$, тогда

$$0 < \frac{t}{2} < 5000,$$

$$-5000 < -\frac{t}{2} < 0,$$

$$7000 - 5000 < 7000 - \frac{t}{2} < 7000,$$

$$2000 < 7000 - \frac{t}{2} < 7000.$$

Следовательно, $0 < Q_0 = 7000 - \frac{t}{2} < 20\,000$, что соответствует условию задачи.

$\left(7000 - \frac{t}{2}\right)$ единиц товара должна производить фирма, чтобы прибыль оказалась максимальной. Тогда сумма налогов составит $\left(7000 - \frac{t}{2}\right) \cdot t$, то есть $\left(-\frac{t^2}{2} + 7000t\right)$ рублей.

По условию задачи сумма налогов должна быть максимальной. Так как зависимость суммы налогов от налога на единицу товара является квадратичной с отрицательным первым коэффициентом, то наибольший

налог будет получен при $t = \frac{-7000}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-7000}{-1} = 7000$.

$t = 7000$. Это соответствует условию задачи: $0 < 7000 < 10\,000$.

Ответ: $t = 7000$.



Интенсив «Решение заданий повышенного и высокого уровня сложности»

Занятие 5 «Решение экономических задач (оптимизация)»

Источник задания: https://math-ege.sdangia.ru/test?category_id=247&filter=all

7. Вадим является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Вадим платит рабочему 200 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, – 300 рублей. Вадим готов выделять 1 200 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Важно правильно понимать условие задачи. Переменная t означает «сколько-то», и её использование в условии задачи не говорит о том, что и на первом, и на втором заводах рабочие будут работать одинаковое время.

Третье предложение устанавливает связь между суммарным временем работы на заводе и количеством выпущенного товара И ТОЛЬКО. Например, если на заводе рабочие суммарно трудятся 100 часов, то за это время они произведут 10 единиц товара. Если будут суммарно трудиться 900 часов, то произведут 30 единиц товара.

Решение. Пусть n^2 часов в неделю суммарно трудятся рабочие на первом заводе, m^2 часов в неделю суммарно – на втором заводе. Тогда $200 n^2$ рублей в неделю платит Вадим рабочим первого завода, $300 m^2$ рублей в неделю – рабочим второго завода, $200 n^2 + 300 m^2$ рублей в неделю выделяет Вадим на оплату труда рабочих. Это 1 200 000 рублей (по условию). Тогда

$$200n^2 + 300m^2 = 1200\,000;$$

$$300m^2 = 1200\,000 - 200n^2;$$

$$3m^2 = 12\,000 - 2n^2;$$

$$m^2 = \frac{12\,000 - 2n^2}{3};$$

$$m^2 = 4000 - \frac{2n^2}{3}.$$

Так как $m > 0$ по смыслу задачи, то $m = \sqrt{4000 - \frac{2n^2}{3}}$.

По смыслу задачи

$$\begin{cases} n \geq 0, \\ 4000 - \frac{2n^2}{3} \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} n \geq 0, \\ 12000 - 2n^2 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} n \geq 0, \\ n^2 \leq 6000; \end{cases} \quad \begin{cases} n \geq 0, \\ -\sqrt{6000} \leq n \leq \sqrt{6000}; \end{cases} \quad 0 \leq n \leq \sqrt{6000}.$$

На первом заводе производят в неделю n единиц товара, на втором производят $m = \sqrt{4000 - \frac{2n^2}{3}}$ единиц товара, всего производят $n + \sqrt{4000 - \frac{2n^2}{3}}$ единиц товара. По условию задачи это количество должно быть наибольшим.

Математическая модель задачи: исследовать функцию $f(n) = n + \sqrt{4000 - \frac{2n^2}{3}}$ на наибольшее значение на промежутке $[0; \sqrt{6000}]$.

$f(n)$ – функция целочисленного аргумента, дискретная функция.

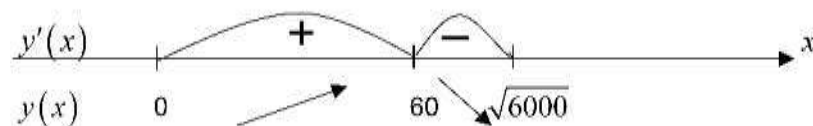
Поставим ей в соответствие непрерывную функцию $y(x) = x + \sqrt{4000 - \frac{2x^2}{3}}$, определённую на промежутке $[0; \sqrt{6000}]$.

$$y'(x) = \left(x + \sqrt{4000 - \frac{2x^2}{3}} \right)' = 1 + \frac{-\frac{4x}{3}}{2\sqrt{4000 - \frac{2x^2}{3}}} = 1 - \frac{2x}{3\sqrt{4000 - \frac{2x^2}{3}}}.$$

На промежутке $[0; \sqrt{6000}]$ производная не определена, если $\sqrt{4000 - \frac{2x^2}{3}} = 0$, то есть при $x = \sqrt{6000}$. Производная равна 0, если

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{6000}, \\ 1 - \frac{2x}{3\sqrt{4000 - \frac{2x^2}{3}}} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq x < \sqrt{6000}, \\ 3\sqrt{4000 - \frac{2x^2}{3}} = 2x; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq x < \sqrt{6000}, \\ 9\left(4000 - \frac{2x^2}{3}\right) = 4x^2; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq x < \sqrt{6000}, \\ 36000 - 6x^2 = 4x^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq x < \sqrt{6000}, \\ 10x^2 = 36000; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq x < \sqrt{6000}, \\ x^2 = 3600; \end{cases} \quad x = 60.$$



Функция $y(x)$ принимает наибольшее значение в целочисленной точке 60, являющейся внутренней точкой промежутка $[0; \sqrt{6000}]$, потому наибольшее значение функции $y(x)$ совпадает с наибольшим значением функции $f(n)$, и функция $f(n)$ принимает его в точке 60.

$$f(60) = 60 + \sqrt{4000 - \frac{2 \cdot 60^2}{3}} = 60 + \sqrt{4000 - 2400} = 60 + \sqrt{1600} = 60 + 40 = 100.$$

100 – наибольшее количество единиц товара, выпускаемого заводами за неделю.
 Ответ: 100 единиц товара.



Источник задания: <https://math100.ru/variant-ege-prof-273/> Вариант от 23.12.2024

8. Фёдор является владельцем двух заводов в разных городах. На заводе производятся абсолютно одинаковые изделия, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более современное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $25t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t изделий, и, если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^3 часов в неделю, то за эту неделю они производят t изделий. За каждый час работы (на каждом из заводов) Фёдор платит рабочему 360 рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 30 изделий. Какую наименьшую сумму (в миллионах рублей) придётся тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

Решение. Пусть рабочие первого завода производят n изделий в неделю, тогда $(30 - n)$ изделий производят в неделю рабочие второго завода, $25n^3$ часов в неделю суммарно трудятся рабочие на первом заводе, $(30 - n)^3$ часов в неделю суммарно трудятся рабочие на втором заводе, $(25n^3 + (30 - n)^3)$ часов в неделю суммарно трудятся рабочие на двух заводах,

$(360 \cdot (25n^3 + (30 - n)^3))$ рублей в неделю суммарно требуется на оплату труда рабочих двух заводов. По условию задачи эта сумма должна быть наименьшей.

По смыслу задачи n , $(30 - n)$, $25n^3$, $(30 - n)^3$ – целые неотрицательные числа, следовательно, n – целое неотрицательное число, $0 \leq n \leq 30$.

Математическая модель задачи: найти наименьшее значение функции $y = 360 \cdot (25n^3 + (30 - n)^3)$, где n – целое неотрицательное число, $0 \leq n \leq 30$.

Функции $y(n)$ поставим в соответствие непрерывную функцию $f(x) = 360 \cdot (25x^3 + (30 - x)^3)$, где $x \in [0; 30]$, x – действительное число. Заметим, что при целых неотрицательных значениях аргумента значения функции $f(x)$ совпадают с соответствующими значениями функции $y(n)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(360 \left(25x^3 + (30 - x)^3 \right) \right)' = 360 \left(75x^2 + 3(30 - x)^2 \cdot (-1) \right) = \\ &= 360 \left(75x^2 - 3(900 - 60x + x^2) \right) = 360 \left(72x^2 + 180x - 2700 \right) = 360 \cdot 36 \left(2x^2 + 5x - 75 \right). \end{aligned}$$

На промежутке $[0; 30]$ нет таких x , в которых производная не существует;

$$f'(x) = 0, \text{ если } \begin{cases} 0 \leq x \leq 30, \\ 2x^2 + 5x - 75 = 0; \end{cases} \quad x = 5.$$

$$2x^2 + 5x - 75 = 0;$$

$$D = 25 + 8 \cdot 75 = 25(1 + 8 \cdot 3) = 25^2;$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 25}{4};$$

$$x_1 = 5, \quad x_2 < 0, \text{ не удовлетворяет условию } 0 \leq x \leq 30.$$

$$f(0) = 360 \cdot (25 \cdot 0^3 + 30^3) = 360 \cdot 30^3;$$

$$f(5) = 360 \cdot (25 \cdot 5^3 + (30 - 5)^3) = 360 \cdot (25 \cdot 5^3 + 25^3) = 360 \cdot 25^2 \cdot 30;$$

$$f(30) = 360 \cdot (25 \cdot 30^3 + 0^3) = 360 \cdot 25 \cdot 30^3.$$

$$f_{\text{наим.}} = f(5) = 360 \cdot 25^2 \cdot 30 = 360 \cdot 625 \cdot 30 = 6\,750\,000.$$

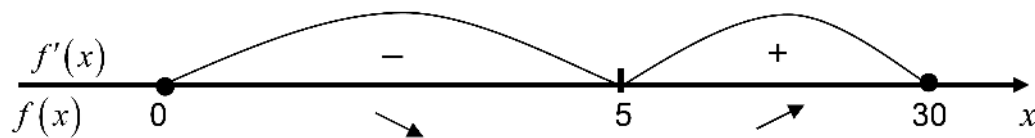
Так как 5 – целое неотрицательное число, то при $n = 5$ функция $y(n)$ принимает наименьшее значение.

$$y_{\text{наим.}} = y(5) = f(5) = 6\,750\,000.$$

6 750 000 рублей, то есть 6,75 млн. рублей в неделю – наименьшая сумма для оплаты труда рабочих двух заводов.

Ответ: 6,75 млн. рублей в неделю.

Другой способ исследования функции на наименьшее значение в данном случае тоже уместен:



5 – единственная точка минимума на промежутке $[0; 30]$, следовательно, при $x = 5$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение.

Так как 5 – целое неотрицательное число, то при $n = 5$ функция $y(n)$ принимает наименьшее значение.

$$\begin{aligned} y_{\text{наим.}} &= y(5) = 360 \cdot \left(25 \cdot 5^3 + (30 - 5)^3 \right) = 360 \cdot (25^2 \cdot 5 + 25^3) = \\ &= 360 \cdot 25^2 \cdot 30 = 360 \cdot 625 \cdot 30 = 6\,750\,000. \end{aligned}$$

6 750 000 рублей, то есть 6,75 млн. рублей в неделю – наименьшая сумма для оплаты труда рабочих двух заводов.

Ответ: 6,75 млн. рублей в неделю.



Источник задания: **ЕГЭ**. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов/ под ред. И. В. Яценко. – М. Изд. «Национальное образование», 2023. Вариант 30.

9. Бригаду из 30 человек нужно распределить по двум объектам. Если на первом объекте работает p человек, то каждый из них получает $200p$ рублей. Если на втором объекте работает p человек, то каждый из них получает $(50p + 300)$ рублей. Как нужно распределить рабочих по объектам, чтобы их суммарная зарплата оказалась наименьшей? Сколько рублей в этом случае придётся заплатить за сутки всем рабочим?

Решение. Пусть n человек работают на первом объекте, тогда $(30 - n)$ человек работают на втором объекте,
 $200n$ рублей – зарплата одного рабочего на первом объекте за сутки,
 $200n^2$ рублей – суммарная зарплата рабочих на первом объекте за сутки,
 $(50(30 - n) + 300)$, то есть $(1800 - 50n)$ рублей – зарплата одного рабочего на втором объекте за сутки,
 $(30 - n)(1800 - 50n)$ рублей – суммарная зарплата рабочих на втором объекте за сутки,

$(200n^2 + (30-n)(1800-50n))$ рублей – суммарная зарплата всех рабочих за сутки. По условию задачи она должна быть наименьшей.

По смыслу задачи n – целое число, причём

$$\begin{cases} n \geq 0, \\ 30 - n \geq 0, \end{cases} \quad 0 \leq n \leq 30.$$

Математическая модель задачи: найти наименьшее значение функции $y = 200n^2 + (30-n)(1800-50n)$, если n – целое число, принадлежащее отрезку $[0; 30]$.

$$y = 200n^2 + 54\,000 - 1500n - 1800n + 50n^2;$$

$$y = 250n^2 - 3300n + 54\,000 - \text{дискретная квадратичная функция.}$$

$$n_0 = \frac{3300}{500} = 6,6 - \text{абсцисса вершины параболы.}$$

$6,6 \in [0; 30]$, но $6,6$ не является целым числом, поэтому не может быть значением n , при котором целочисленная квадратичная функция $y = 250n^2 - 3300n + 54\,000$ примет наименьшее значение.

Два ближайших целых числа, принадлежащих промежутку $[0; 30]$, между которыми находится число $6,6$, – это 6 и 7 . Заметим, что при этих значениях n и $(30-n)$ являются целыми числами. Тогда наименьшее значение функции $y = 250n^2 - 3300n + 54\,000$ – это наименьшее из значений $y(6)$ и $y(7)$.

$$y(6) = 250 \cdot 36 - 3300 \cdot 6 + 54000 = 9000 - 19800 + 54000 = 43200;$$

$$y(7) = 250 \cdot 49 - 3300 \cdot 7 + 54000 = 12250 - 23100 + 54000 = 43150.$$

Наименьшее значение функции равно 43 150 и достигается при $n = 7$.

Следовательно, 7 человек нужно направить на первый объект, остальных 23 человека – на второй объект. При этом суммарная зарплата за смену окажется наименьшей и составит 43 150 рублей.

Ответ: 7 человек на первый объект, 23 человека на второй, наименьшая суммарная зарплата за смену составит 43 150 рублей.

Обратите внимание на 2 момента:

1) В обосновании важно указать, что абсцисса вершины параболы принадлежит (не принадлежит) области определения функции, (область определения устанавливается по смыслу задачи).

Вообще говоря, если абсцисса x_0 вершины параболы принадлежит области допустимых значений переменной, то наибольшее (наименьшее) значение функции достигается в абсциссе вершины параболы, а само наибольшее (наименьшее) значение совпадает с ординатой вершины параболы.

Если абсцисса x_0 вершины параболы не принадлежит закрытому промежутку – области допустимых значений переменной, то функция принимает наибольшее (наименьшее) значение в конечной точке промежутка, а не в вершине параболы.

2) **Получение целочисленного результата при исследовании функции нельзя считать окончательным.** Необходимо проверить, принимает ли *каждое выражение, символизирующее целое и неотрицательное значение*, именно значение целое и неотрицательное.

Если хотя бы для одного выражения это будет нарушено, то предварительно найденное значение аргумента нужно изменить до ближайшего целого значения (если это допустимо, то и в сторону уменьшения, и в сторону увеличения) и повторно перепроверить все выражения на целочисленность и неотрицательность. И так до тех пор, пока **все** выражения, для которых допустимы только целые и неотрицательные значения, не станут таковыми. После этого составляем ответ на вопрос задачи.



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

ПАНИНА Н. А.

12.02.2026 состоится занятие «Решение геометрических задач»

Презентации интенсива размещены на сайте:

http://www.dpo-smolensk.ru/rumo_new/l-pred-emc/2-matematika/intensiv.php