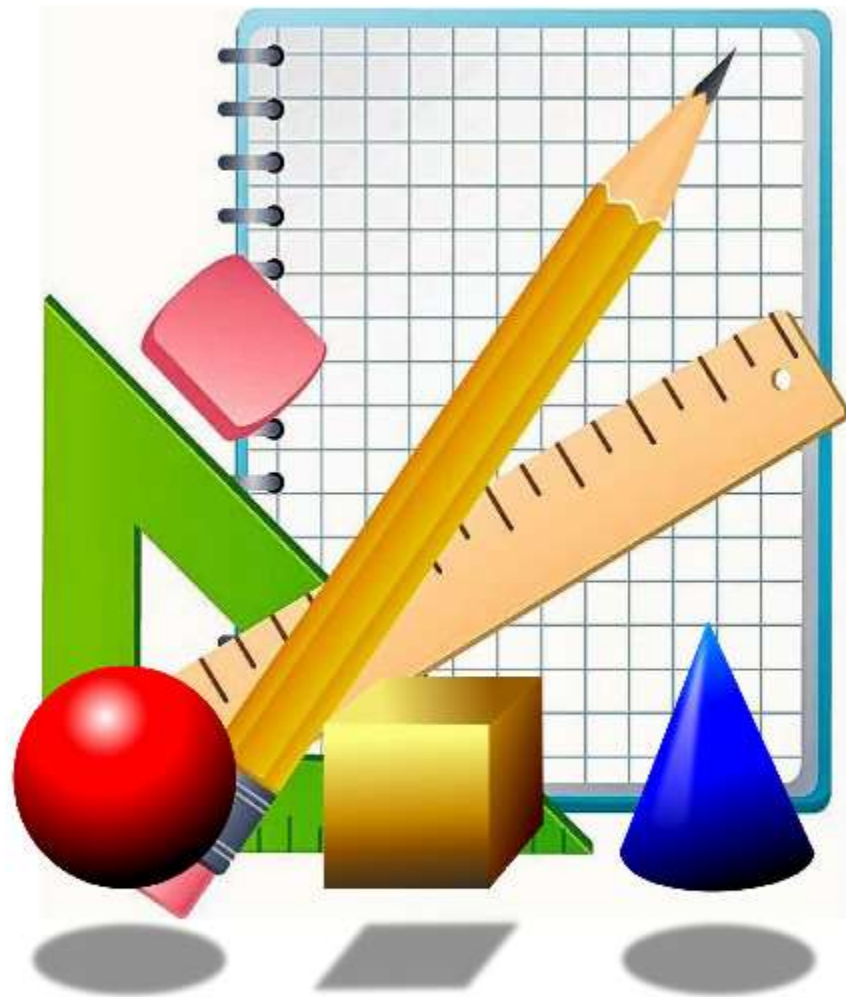
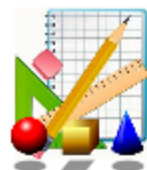




Задания с кратким ответом. Эффективные способы выполнения

Панина Н. А.
учитель математики
МБОУ СШ № 33,
г. Смоленск



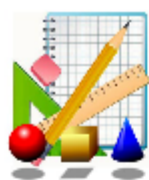
Геометрические задачи на плоскости

Особенность условия: текст задачи сопровождается готовым чертежом.

Памятка для обучающихся «Шаги эффективного решения»

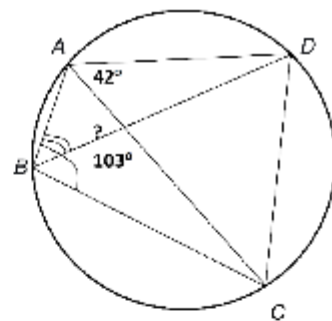
1. Читая задачу «с остановками», нанесите исходные данные на чертёж.
2. Ещё раз читая задачу, проверьте правильность нанесения исходных данных и выделите, используя знак вопроса (контур, тонирование), элемент, который нужно найти.
3. Осознавая смысл задания, составьте логическую цепочку получения конечного результата, выберите методы получения промежуточных результатов (осознайте теоретические факты, лежащие в основе решения).
4. Приступите к активным действиям. Промежуточные результаты каждого действия наносите на чертёж, сопоставляя их с исходными данными, убеждаясь в их правдоподобности.
5. Прочитайте задание, убедитесь, что задача решена. Проверьте найденный ответ на правдоподобность, зафиксируйте его в бланке ответов (*обратите внимание на номер, указанный в строке, он должен соответствовать номеру задания*).

PS Наименование в ответе указывать **не нужно**.



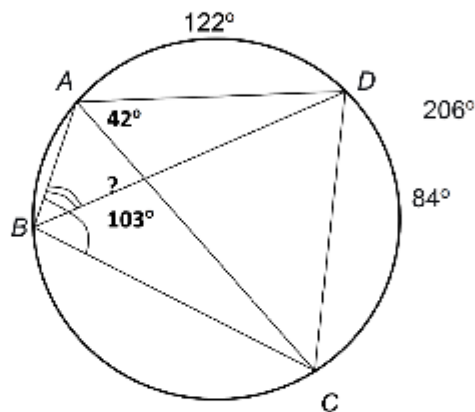
Рассмотрим применение алгоритма при выполнении заданий типа: найти вписанный угол

Задание 1.1. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 103° , угол CAD равен 42° . Найдите угол ABD . Ответ дайте в градусах.



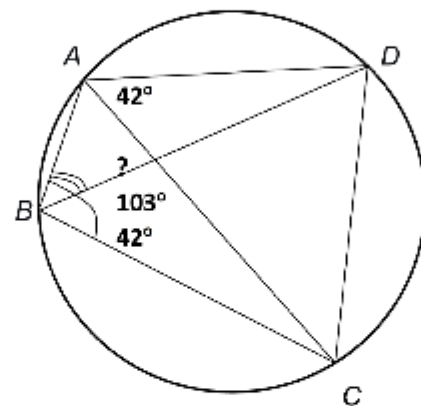
Решение

Первый способ решения



- 1) $\angle ABC$ – вписанный и равен 103° , тогда дуга, на которую он опирается содержит 206° ; $\cup ADC = 206^\circ$.
 - 2) $\angle CAD$ – вписанный и равен 42° , тогда дуга, на которую он опирается содержит 84° ; $\cup CD = 84^\circ$.
 - 3) $\cup AD = \cup ADC - \cup DC = 206^\circ - 84^\circ = 122^\circ$.
 - 4) $\angle ABD$ – вписанный и опирается на дугу в 122° , тогда он равен 61° .
- Ответ: 61° (на ЕГЭ наименование не указываем)

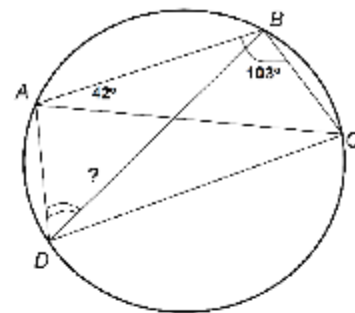
Второй способ решения



- 1) $\angle CAD$ и $\angle CBD$ – вписанные и опираются на одну и ту же дугу CD , тогда они равны.
$$\left. \begin{array}{l} \angle CAD = \angle CBD \\ \angle CAD = 42^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle CBD = 42^\circ$$
 - 2) $\angle ABD = \angle ABC - \angle CBD = 103^\circ - 42^\circ = 61^\circ$.
- Ответ: 61°

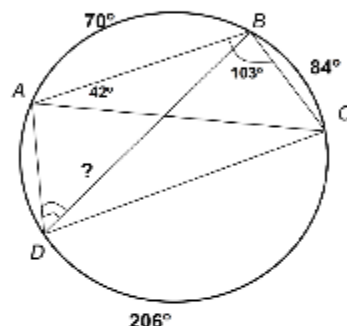


Задание 1.2. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 103° , угол BAC равен 42° . Найдите угол ADB . Ответ дайте в градусах.



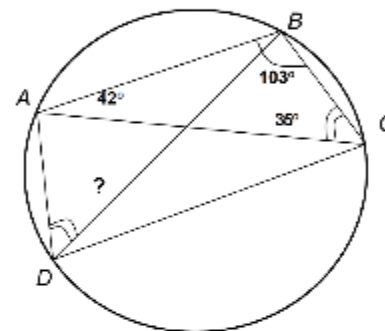
Решение

Первый способ решения

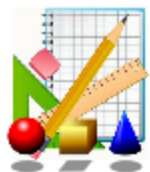


- 1) $\angle ABC$ – вписанный и равен 103° , тогда дуга, на которую он опирается содержит 206° ; $\cup ADC = 206^\circ$.
 - 2) $\angle BAC$ – вписанный и равен 42° , тогда дуга, на которую он опирается содержит 84° ; $\cup BC = 84^\circ$.
 - 3) $\cup AB = 360^\circ - (\cup ADC + \cup CB) = 360^\circ - (206^\circ + 84^\circ) = 70^\circ$.
 - 4) $\angle ADB$ – вписанный и опирается на дугу в 70° , тогда он равен 35° .
- Ответ: 35°

Второй способ решения

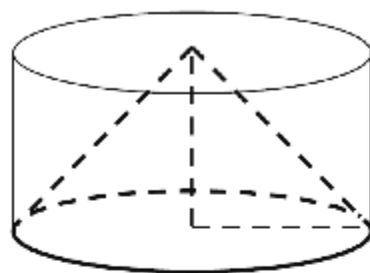


- 1) Рассмотрим треугольник ABC .
В нём $\angle ABC = 103^\circ$,
 $\angle BAC = 42^\circ$.
Тогда $\angle ACB = 180^\circ - (103^\circ + 42^\circ) = 180^\circ - 145^\circ = 35^\circ$.
 - 2) $\angle ADB$ и $\angle ACB$ – вписанные и опираются на одну и ту же дугу AB , тогда они равны.
$$\left. \begin{array}{l} \angle ADB = \angle ACB \\ \angle ACB = 35^\circ \end{array} \right| \Rightarrow \angle ADB = 35^\circ$$
- Ответ: 35°



Стереометрические задания, в которых представлены два тела, эффективно решать методом сопоставления

Задание 3.1. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $3\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.



Решение

Цилиндр

Радиус основания: R

Высота: $h = R$ (по условию)

$$S_{\text{бок. цилиндра}} = 2\pi R h = 2\pi R^2 = 3\sqrt{2};$$

$$\pi R^2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: 3

Конус

Радиус основания: R

Высота: $h = R$ (по условию)

$$S_{\text{бок. конуса}} = \pi R l = \pi R \sqrt{R^2 + R^2} = \pi R \cdot R\sqrt{2} = \pi R^2 \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = \underbrace{3}_{\text{проверка ответа на достоверность}} < 3\sqrt{2}.$$

Задание 3.2. Шар вписан в цилиндр. Объем шара равен 16. Найдите объем цилиндра.

Решение.

Шар

Радиус шара: R

$$V_{\text{шара}} = \frac{4\pi R^3}{3} = 16;$$

$$\pi R^3 = 12.$$

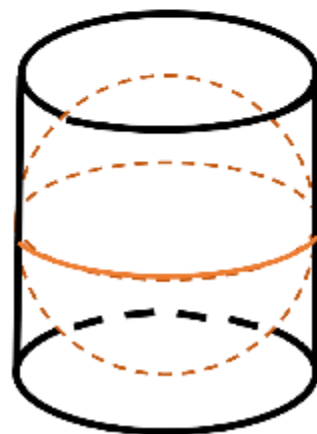
Ответ: 24

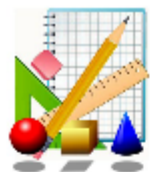
Цилиндр

Радиус основания: R

Высота: $h = 2R$

$$V_{\text{цилиндра}} = S_{\text{осн.}} \cdot h = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3 = 2 \cdot 12 = 24.$$





Найти площадь, площадь поверхности, объём, если фигуры (тела) подобны

Если фигура F_1 подобна фигуре F_2 , то

$$\frac{S_{F_1}}{S_{F_2}} = \frac{(\text{сторона фигуры } F_1)^2}{\left(\begin{matrix} \text{соответствующая} \\ \text{сторона фигуры } F_2 \end{matrix}\right)^2} = \frac{(\text{высота фигуры } F_1)^2}{\left(\begin{matrix} \text{соответствующая} \\ \text{высота фигуры } F_2 \end{matrix}\right)^2} = \frac{(\text{периметр фигуры } F_1)^2}{(\text{периметр фигуры } F_2)^2}$$

Если многогранники F_1 и F_2 подобны, то

$$\frac{S_{\text{пов. } F_1}}{S_{\text{пов. } F_2}} = \frac{(\text{ребро многогранника } F_1)^2}{\left(\begin{matrix} \text{соответствующее ребро} \\ \text{многогранника } F_2 \end{matrix}\right)^2} = \frac{(\text{высота многогранника } F_1)^2}{\left(\begin{matrix} \text{соответствующая высота} \\ \text{многогранника } F_2 \end{matrix}\right)^2} = \frac{(\text{апофема многогранника } F_1)^2}{\left(\begin{matrix} \text{соответствующая апофема} \\ \text{многогранника } F_2 \end{matrix}\right)^2}$$

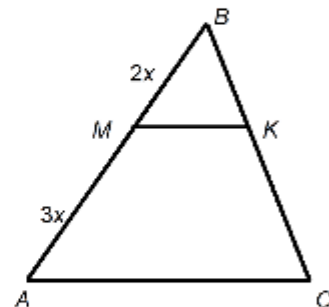
$$\frac{V_{F_1}}{V_{F_2}} = \frac{(\text{ребро многогранника } F_1)^3}{\left(\begin{matrix} \text{соответствующее ребро} \\ \text{многогранника } F_2 \end{matrix}\right)^3} = \frac{(\text{высота многогранника } F_1)^3}{\left(\begin{matrix} \text{соответствующая высота} \\ \text{многогранника } F_2 \end{matrix}\right)^3} = \frac{(\text{апофема многогранника } F_1)^3}{\left(\begin{matrix} \text{соответствующая апофема} \\ \text{многогранника } F_2 \end{matrix}\right)^3}$$

Если тела вращения F_1 и F_2 подобны, то

$$\frac{S_{\text{пов. } F_1}}{S_{\text{пов. } F_2}} = \frac{(\text{радиус основания тела } F_1)^2}{(\text{радиус основания тела } F_2)^2} = \frac{(\text{высота тела } F_1)^2}{(\text{высота тела } F_2)^2} = \frac{(\text{образующая тела } F_1)^2}{(\text{образующая тела } F_2)^2}$$

$$\frac{V_{F_1}}{V_{F_2}} = \frac{(\text{радиус основания тела } F_1)^3}{(\text{радиус основания тела } F_2)^3} = \frac{(\text{высота тела } F_1)^3}{(\text{высота тела } F_2)^3} = \frac{(\text{образующая тела } F_1)^3}{(\text{образующая тела } F_2)^3}$$

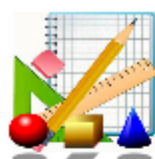
Задание 1.3. Точки M и K лежат на сторонах треугольника ABC . Прямая MK параллельна стороне AC . Найдите площадь треугольника ABC , если точка M делит сторону BA в отношении 2:3, считая от точки B , и площадь треугольника MBK равна 8.



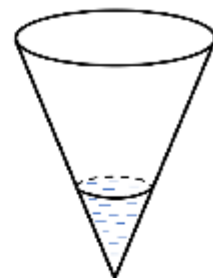
Решение. Так как прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает треугольник, подобный данному, то треугольники MBK и ABC подобны. Тогда

$$\frac{S_{\triangle MBK}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{MB^2}{AB^2} = \frac{(2x)^2}{(5x)^2} = \frac{4x^2}{25x^2} = \frac{4}{25}; \quad \frac{8}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4}{25}; \quad S_{\triangle ABC} = \frac{8 \cdot 25}{4} = 50.$$

Ответ: 50



Задание 3.3 Сосуд, объём которого 54 мл, имеет форму конуса. На треть высоты он заполнен водой. Сколько миллилитров воды нужно долить в сосуд, чтобы он был заполнен доверху?



Решение. Так как плоскость, параллельная основанию конуса, отсекает конус, подобный данному, то конус, заполненный водой, и исходный конус подобны. Тогда

$$\frac{V_{\text{воды}}}{V_{\text{исходного конуса}}} = \left(\frac{h}{3}\right)^3 = \frac{h^3}{27 \cdot 27} = \frac{h^3}{27h^3} = \frac{1}{27}; \quad \frac{V_{\text{воды}}}{54} = \frac{1}{27}; \quad V_{\text{воды}} = \frac{1 \cdot 54}{27} = 2.$$

Необходимо долить $54 - 2$, то есть 52 мл воды.

Ответ: 52

Совет: обратите внимание на опорные конспекты из «Облако знаний»

<https://oblakoz.ru/conspect/490987/Ob-yom-i-ploshhad--poverhnosti-podobnyh-tel> -

опорный конспект на тему «Объём и площадь поверхности подобных тел». Для получения других конспектов можно

Шаг 1. Открыть этот опорный конспект

Шаг 2. В поисковике указать тему нужного конспекта и нажать клавишу Enter

Каждый опорный конспект выполнен эстетично на одной странице в альбомном расположении.

Возможность «печать» предусмотрена организатором.

Объём и площадь поверхности подобных тел

- Площади поверхности подобных тел относятся как квадраты сходственных линейных элементов тел.
- Объёмы подобных тел относятся как кубы сходственных линейных элементов этих тел.
- **Подобные тела в пространстве** — это геометрические объекты, которые имеют одинаковую форму, но могут иметь разные размеры.
- Объёмы подобных тел изменяются пропорционально кубу коэффициента подобия.
- **Коэффициент подобия** — это число, равное отношению сходственных сторон подобных фигур. Чтобы найти объём подобной фигуры, нужно умножить объём исходной фигуры на куб коэффициента подобия.

$$V_{\text{подоб}} = V_{\text{исх}} \cdot k^3.$$

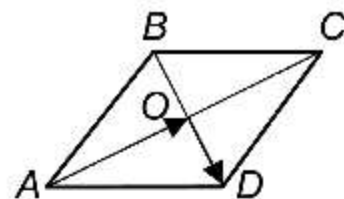
Пример. Все рёбра правильного тетраэдра увеличили в 3 раза. Как изменится его объём?

Решение. Если все рёбра правильного тетраэдра увеличить в 3 раза, то его объём увеличится в 27 раз.

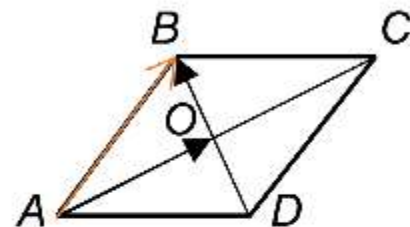
Ответ. Объём увеличился в 27 раз.



Задание 2.1. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OD}$.



Решение. $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$

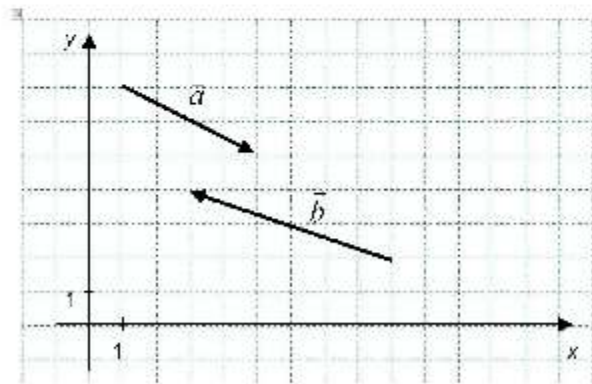


$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = AB = \sqrt{\left(\frac{12}{2}\right)^2 + \left(\frac{16}{2}\right)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

Ответ: 10

Задание 2.2. На рисунке изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите скалярное произведение векторов $2\vec{a}$ и $\vec{a} - \vec{b}$.



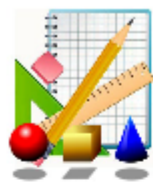
$$1) \quad \vec{a}(4; -2); \quad \vec{b}(-6; 2)$$

$$2) \quad 2\vec{a} = \vec{c}; \quad \vec{c}(8; -4)$$

$$3) \quad \vec{a} - \vec{b} = \vec{m}; \quad \vec{m}(10; -4)$$

$$4) \quad \vec{c} \cdot \vec{m} = 8 \cdot 10 + (-4) \cdot (-4) = 80 + 16 = 96$$

Ответ: 96



Задание 4.1. На чемпионате по прыжкам в воду выступают 60 спортсменов, среди них 19 спортсменов из Голландии и 24 спортсмена из Дании. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что четвёртым будет выступать спортсмен из Дании. (2025 год)

Типичная ошибка: неправильное толкование условия. Речь не идёт о выступлении на самом соревновании. Речь идёт о жеребьёвке.

Условие задачи нужно понимать так: проводится жеребьёвка, в барабане 60 шаров с номерами 1–60, спортсмены по очереди подходят к барабану, извлекают шар и по номеру на выбранном шаре узнают номер своего старта на соревнованиях. Нужно найти вероятность того, что шар с номером 4 достанется спортсмену из Дании (подразумевается, что это был первый выбор из барабана).

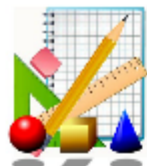
Решение

$n = 60$ – общее число исходов испытания «выбрать один шар из 60»,

$m = 24$ – число исходов события «шар выбрал спортсмен из Дании», то есть число благоприятных исходов.

Тогда
$$p = \frac{m}{n}; \quad p = \frac{24}{60} = \frac{4}{10} = 0,4.$$

Ответ: 0,4



Задание 4.2. В группе туристов 20 человек. С помощью жребия они выбирают семь человек, которые должны идти в село за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин? (2024 год)

Рассмотрим задачу 2024 года в общем виде. В группе туристов a человек. С помощью жребия они выбирают k человек, которые должны идти в село за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

Классическое решение задачи:

общее число исходов выбора группы из k человек: $n = C_a^k$,

число благоприятных исходов (в село идёт турист Д. и с ним ещё $(k - 1)$ человек, которых нужно выбрать из $(a - 1)$ человек): $m = C_{a-1}^{k-1}$.

Вероятность того, что турист Д. пойдёт в магазин, равна

$$p = \frac{m}{n}; \quad p = \frac{C_{a-1}^{k-1}}{C_a^k} = \frac{(a-1)!}{k!(a-k)!} \cdot \frac{(k-1)!(a-1-k+1)!}{a!} = \frac{(a-1)! \cdot \overset{k}{k!} \cdot (a-k)!}{(k-1)! \cdot (a-k)! \cdot \underset{a}{a!}} = \frac{k}{a}.$$

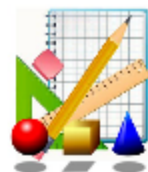
Решение в общем виде показывает, что подобную задачу можно решать формально, и при этом значительно сократятся затраты времени и трудозатраты.

Вероятность того, что **один** человек войдёт в состав выборки, равна отношению количества выбираемых человек к общему количеству человек в группе.

Решение задачи из ЕГЭ-2024: $p = \frac{7}{20} = 0,35$.

Ответ: 0,35

PS Обратите внимание на то, что в условиях экзаменационных задач **числовые данные могут быть представлены не арабской символикой, а словом.**



Задание 5.1. Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,7. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в первую мишень и не попадёт в три последние. (2024 год)

Решение. Вводим легенду: П – попал в мишень, Н – не попал. На языке легенды описываем событие: ПННН и, применяя теорему умножения, находим вероятность:

$$P(\text{ПННН}) = 0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 0,0189$$

Ответ: 0,0189.

Задание 5.2. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,2. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,95. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,05. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля. (2026 год)

Решение. Вводим легенду:

И – исправная батарейка, $P(I) = 0,8$

З – система забракует батарейку

Н – неисправная батарейка, $P(H) = 0,2$

К – система признаёт батарейку качественной

Составим полную группу событий (понимая, что система выбирает батарейку и проверяет её качество), выделим события, соответствующие заданию, и рассчитаем вероятность.

$$\text{ИЗ} \checkmark p_1 = 0,8 \cdot 0,05 = 0,04$$

ИК

$$\text{НЗ} \checkmark p_2 = 0,2 \cdot 0,95 = 0,19$$

НК

$$P(\text{ИЗ или НЗ}) = p_1 + p_2 = 0,04 + 0,19 = 0,23$$

Ответ: 0,23



Задание 5.3. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в первом автомате закончится кофе, равна 0,2. Вероятность того, что кофе закончится во втором автомате, такая же. Вероятность того, что кофе закончится в двух автоматах, равна 0,18. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в двух автоматах. (2025 год)

Шаг 1. Анализируем условие. Ключевая фраза «вероятность того, что кофе закончится в двух автоматах, равна 0,18». Понимаем, что речь идёт о совместных событиях. Следовательно, модель задачи – круги Эйлера.

Шаг 2. Иллюстрируем условие задачи с помощью кругов Эйлера и ведём расчёт вероятности события «кофе закончится или только в одном первом автомате, или только в одном втором автомате, или закончится в двух автоматах сразу».

Шаг 3. Переходим к противоположному событию «кофе нигде не закончится, то есть останется в двух автоматах».



Ответ: 0,78



Задание 5.4. Вероятность того, что купленный утюг прослужит более года, равна 0,96. Вероятность того, что он прослужит более трёх лет, равна 0,75. Найдите вероятность того, что купленный утюг прослужит более года, но не более трёх лет.

Моделирование условия задачи на числовой прямой

Решение. Событие A : утюг прослужит более года, но не более трёх лет. Вероятность события A нужно найти.

Событие B : утюг прослужит более года, $P(B) = 0,96$ – вероятность события B .

Событие C : утюг прослужит более трёх лет. $P(C) = 0,75$ – вероятность события C .

Проиллюстрируем алгебру событий на числовом луче:



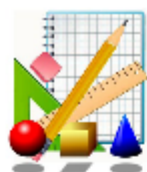
$$B = A + C.$$

A и C – несовместные события.

Тогда $P(B) = P(A + C) = P(A) + P(C)$.

Отсюда $P(A) = P(B) - P(C) = 0,96 - 0,75 = 0,21$.

Ответ: 0,21.



Задание 6.1 Организаторы лотереи выпустили 10 000 билетов. Выигрыши распределены следующим образом

Выигрыш (в рублях)	100	1000	5000	10 000	50 000
Число выигрышных билетов	500	100	50	10	1

Найдите математическое ожидание величины «выигрыш на один билет». Ответ дайте в рублях.

Решение. 1) (Устно) Анализируем условие задачи.

«Выигрыш на один билет» – дискретная величина. Тогда (вспоминаем теорию) математическое ожидание дискретной случайной величины – это сумма произведений значений случайной величины и вероятностей их появления:

$$E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + x_4 \cdot p_4 + x_5 \cdot p_5.$$

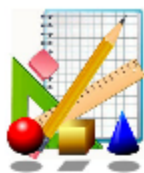
2) (Письменно) Дополняем условие задачи (в КИМ) – указываем значения случайной величины (значения x) и рассчитываем вероятности выигрышей.

Выигрыш (в рублях)	100 = x_1	1000 = x_2	5000 = x_3	10 000 = x_4	50 000 = x_5
Число выигрышных билетов	500	100	50	10	1
Вероятность выигрыша	$\frac{500}{10000}$	$\frac{100}{10000}$	$\frac{50}{10000}$	$\frac{10}{10000}$	$\frac{1}{10000}$

3) Рассчитываем математическое ожидание

$$E(X) = \frac{100 \cdot 500}{10000} + \frac{1000 \cdot 100}{10000} + \frac{5000 \cdot 50}{10000} + \frac{10000 \cdot 10}{10000} + \frac{50000 \cdot 1}{10000} = 5 + 10 + 25 + 10 + 5 = 55.$$

Ответ: 55



Задание 6.2. В таблице показано количество билетов и возможные выигрыши беспроигрышной денежной лотереи. Цена билета лотереи 50 рублей. Всего билетов выпущено 1000 штук. Участник покупает один случайный билет. На сколько рублей цена билета выше, чем математическое ожидание выигрыша?

Выигрыш	10	50	100	5000
Количество билетов	990	6	3	1

Источник задания: <https://ege.sdamgia.ru/test?id=91929959>

Решение. 1) Найдём математическое ожидание выигрыша по формуле

$$E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + x_4 \cdot p_4 + x_5 \cdot p_5,$$

так как имеем дискретную случайную величину.

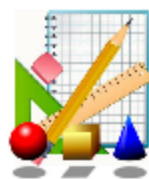
Выигрыш	$10 = x_1$	$50 = x_2$	$100 = x_3$	$5000 = x_4$
Количество билетов	990	6	3	1
Вероятность выигрыша	$\frac{990}{1000} = p_1$	$\frac{6}{1000} = p_2$	$\frac{3}{1000} = p_3$	$\frac{1}{1000} = p_4$

$$E(X) = \frac{10 \cdot 990}{1000} + \frac{50 \cdot 6}{1000} + \frac{100 \cdot 3}{1000} + \frac{5000 \cdot 1}{1000} = \frac{9900 + 300 + 300 + 5000}{1000} = \frac{15500}{1000} = \frac{155}{10} = 15,5.$$

15,5 рублей – математическое ожидание выигрыша.

2) Цена билета лотереи 50 рублей,
математическое ожидание выигрыша 15,5 рублей,
тогда $\Delta = 50 - 15,5 = 34,5$ (рублей).

Ответ: 34,5



Задание 6.3. Найдите дисперсию случайной величины X , если известно её распределение

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Источник задания: <https://alexlarin.net/ege/2027/trvar546.html>

Решение. Дисперсию дискретной случайной величины можно найти по формуле

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2,$$

где $E(X^2) = (x_1)^2 \cdot p_1 + (x_2)^2 \cdot p_2 + (x_3)^2 \cdot p_3$,

$$E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3.$$

1)

X^2	$1 = (x_1)^2$	$9 = (x_2)^2$	$25 = (x_3)^2$
P	$0,1 = p_1$	$0,8 = p_2$	$0,1 = p_3$

$$E(X^2) = 1 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,8 + 25 \cdot 0,1 = 0,1 + 7,2 + 2,5 = 9,8.$$

2)

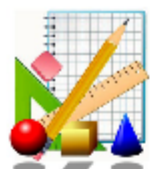
X	$1 = x_1$	$3 = x_2$	$5 = x_3$
P	$0,1 = p_1$	$0,8 = p_2$	$0,1 = p_3$

$$E(X) = 1 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,8 + 5 \cdot 0,1 = 0,1 + 2,4 + 0,5 = 3.$$

3) $D(X) = 9,8 - 3^2 = 9,8 - 9 = 0,8$

Ответ: 0,8

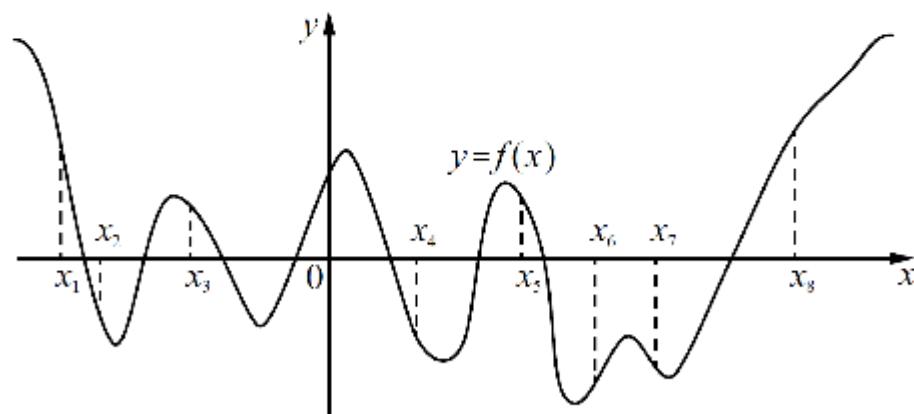
Второй способ вычисления дисперсии случайной величины – расчёт по определению, то есть по формуле $D(X) = E(X - (E(X))^2)$ – более трудоёмкий.



Задание 9. Важно осознавать, чей график читаем

- Если читаем график функции, то мысленно проводим касательные и исследуем углы их наклона (угол между касательной и положительным направлением оси Ox):
 - ✓ В точке x_0 угол наклона острый $\rightarrow f'(x_0) > 0$.
 - ✓ В точке x_0 угол наклона тупой $\rightarrow f'(x_0) < 0$.
 - ✓ Касательная параллельна оси Ox или совпадает с ней $\rightarrow f'(x_0) = 0$.

ЕГЭ-2023. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечено восемь точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$. Найдите количество отмеченных точек, в которых производная функции $f(x)$ положительна.



Решение. В каждой указанной точке мысленно проводим касательную. В точках $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7$ угол наклона касательной тупой, производная в этих точках отрицательная. В точках x_6 и x_8 угол наклона касательной острый, производная в этих точках положительная.

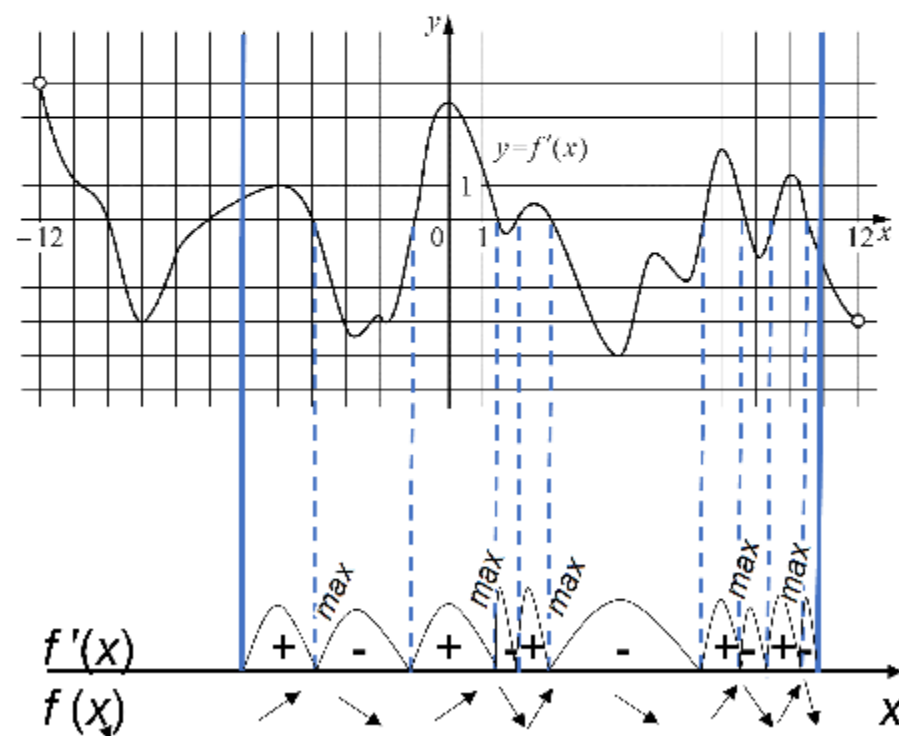
Читаем задание: «Найдите количество отмеченных точек, в которых производная функции $f(x)$ положительна», отвечаем: «Две точки».

Ответ: 2

- Если читаем график производной функции, то исследуем знак производной в интервале и составляем суждение о монотонности функции:
 - Если на интервале значения производной положительные, то на этом интервале функция возрастает.
 - Если на интервале значения производной отрицательные, то на этом интервале функция убывает.

ЕГЭ-2024. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-12; 12)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-6; 11]$.

Решение. Выделяем отрезок $[-6; 11]$. Составляем графическую схему исследования знаков производной и составляем суждения о монотонности функции

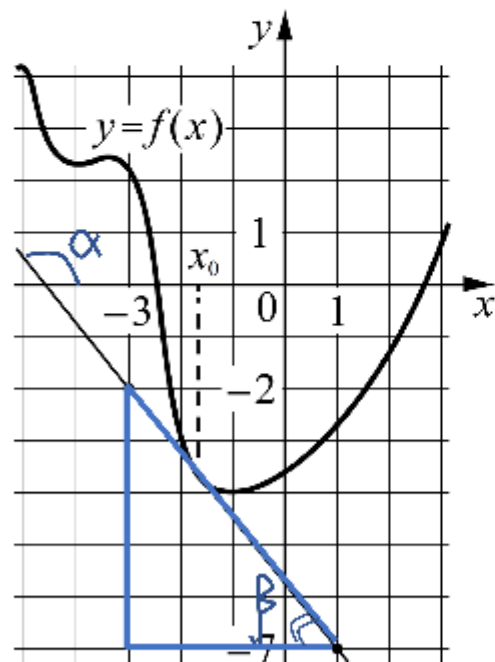
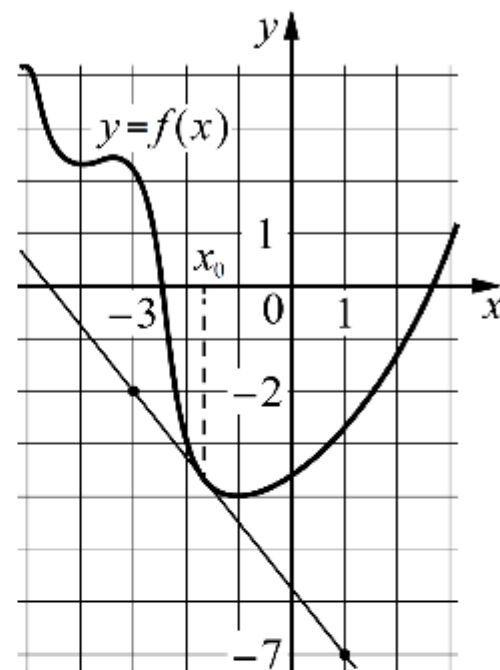


Ответ: 5

- Если на чертеже представлен график функции и касательная в точке x_0 , то опираемся на геометрический смысл производной

ЕГЭ-2025. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

Решение.

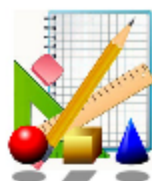


Вспоминаем геометрический смысл производной:

$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k_{\text{касат.}}$, где α — угол наклона касательной, то есть угол между касательной и положительным направлением оси Ox .

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(180^\circ - \beta) = -\operatorname{tg} \beta = -\frac{5}{4} = -1,25.$$

Ответ: $-1,25$



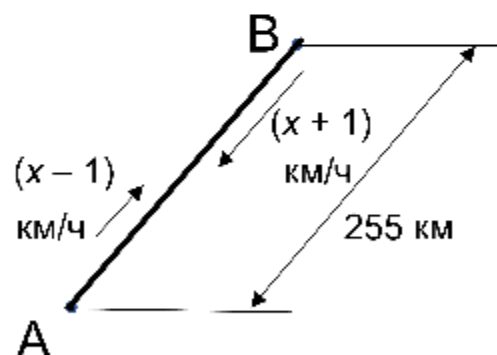
Задание 11.1. Моторная лодка прошла против течения реки 255 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 1 км/ч. Ответ дайте в км/ч. (ЕГЭ-2025)

Решение. Шаг 1. Задачу на движение иллюстрируем и составляем математическую модель по составленной схеме.

Шаг 2. Смысловые характеристики величин присоединяем к модели. Это позволяет сэкономить время решения задачи.

Шаг 3. Работаем с упрощённой моделью, интерпретируем результат.

Шаг 4. Возвращаемся к условию: «Что требуется найти в задаче? В каких единицах измерения требуется дать ответ?» и отвечаем на главный вопрос задачи.



$$\frac{255}{x-1} - \frac{255}{x+1} = 2.$$

По смыслу задачи $x - 1 > 0$, $x + 1 > 0$, тогда

$$\begin{aligned} 255(x+1) - 255(x-1) &= 2(x^2 - 1), \\ 255x + 255 - 255x + 255 &= 2(x^2 - 1), \\ 2 \cdot 255 &= 2(x^2 - 1), \\ x^2 &= 256, \\ x &= 16, \text{ так как } x - 1 > 0. \end{aligned}$$

16 км/ч – скорость лодки в неподвижной воде.

Ответ: 16

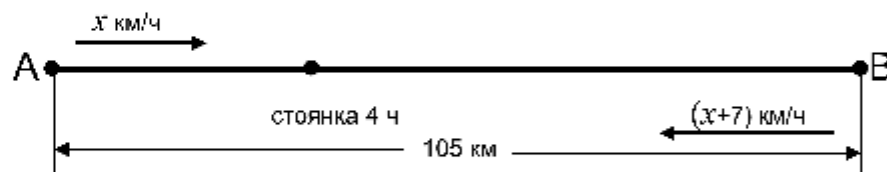


Особенности решения полных квадратных уравнений

Дискриминант лучше не вычислять, а раскладывать на множители методом вынесения общего множителя за скобки.

Задание 11.2. Велосипедист выехал из города A в город B , расстояние между которыми равно 105 км. Его скорость была постоянной на протяжении всего пути. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 7 км/ч больше прежней. В пути он сделал остановку, которая составила 4 часа. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь от A до B . Найдите скорость велосипедиста на пути из B в A . Ответ дайте в километрах в час.

Решение.



$$\frac{105}{x} = \frac{105}{x+7} + 4.$$

По смыслу задачи $x > 0$, $x+7 > 0$. Тогда

$$105(x+7) = 105x + 4x(x+7),$$

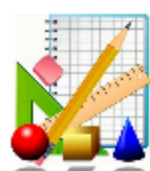
$$105x + 105 \cdot 7 = 105x + 4x^2 + 28x,$$

$$4x^2 + 28x - 105 \cdot 7 = 0,$$

$$D = 4 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 7 + 4 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 15 \cdot 7 = 28^2 \cdot (1+15) = 28^2 \cdot 4^2 = 112^2,$$

$$x_1 = \frac{-28 - 112}{8} < 0, \text{ не подходит; } x_2 = \frac{-28 + 112}{8} = \frac{84}{8} = 10,5.$$

10,5 км/ч – скорость
велосипедиста на пути из A в B .
 $10,5 + 7 = 17,5$ (км/ч) – скорость
на пути из B в A .
Ответ: 17,5 (как на ЕГЭ)



✓ **Первая особенность решения текстовой задачи:** дробно-рациональное уравнение решаем не по алгоритму, а присоединяем смысловые оценки к математической модели, получаем модель с ограничениями.

✓ **Вторая особенность:** дискриминант квадратного уравнения не вычисляем, а раскладываем на множители, из которых легко извлекаются квадратные корни.

Оба приёма позволяют значительно сократить затраты времени и трудозатраты.

Задание 11.3. Первая труба пропускает на 4 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 672 литра она заполняет на 4 минуты быстрее, чем первая труба? (ЕГЭ-2023)
Решение (*задачи «на работу» лучше решать по таблице*).

	Производительность труда (л/мин.)	Время (мин.)	Объём работы (л)
1-я труба	$x - 4$	$\frac{672}{x - 4}$	672
2-я труба	x	$\frac{672}{x}$	672

$$\frac{672}{x-4} - \frac{672}{x} = 4 \Leftrightarrow \frac{168}{x-4} - \frac{168}{x} = 1.$$

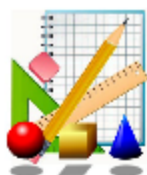
По смыслу задачи $x - 4 > 0$, $x > 0$, тогда $168x - 168(x - 4) = x^2 - 4x$.

$$x^2 - 4x - 4 \cdot 168 = 0, \quad D = 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 168 = 16 \cdot (1 + 168) = 16 \cdot 169 = 4^2 \cdot 13^2 = 52^2,$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 52}{2} = 2 \pm 26.$$

Так как $x - 4 > 0$, то $x = 28$. Вторая труба пропускает 28 литров воды в минуту.

Ответ: 28



Работу с моделью в заданиях 11.2 и 11.3 можно оформить иначе (классически), но при этом увеличатся затраты времени

Работа с моделью в задании 11.2

$$\begin{cases} \frac{105}{x} = \frac{105}{x+7} + 4, \\ x > 0, \\ x+7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 105(x+7) = 105x + 4x(x+7), \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 105x + 105 \cdot 7 = 105x + 4x^2 + 28x, \\ x > 0 \end{cases}$$

$$4x^2 + 28x - 105 \cdot 7 = 0,$$

$$D = 4 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 7 + 4 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 15 \cdot 7 = 28^2 \cdot (1 + 15) = 28^2 \cdot 4^2 = 112^2,$$

$$x_1 = \frac{-28 - 112}{8} < 0, \text{ противоречит системе;}$$

$$x_2 = \frac{-28 + 112}{8} = \frac{84}{8} = 10,5 - \text{соответствует системе.}$$

Работа с моделью в задании 11.3

$$\begin{cases} \frac{672}{x-4} - \frac{672}{x} = 4, \\ x-4 > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{168}{x-4} - \frac{168}{x} = 1, \\ x > 4, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 4 \cdot 168 = 0, \\ x > 4. \end{cases}$$

$$x^2 - 4x - 4 \cdot 168 = 0,$$

$$D = 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 168 = 16 \cdot (1 + 168) = 16 \cdot 169 = 4^2 \cdot 13^2 = 52^2,$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 52}{2} = 2 \pm 26. \quad \begin{cases} x = -24, \\ x = 28. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -24 \\ x = 28, \Leftrightarrow x = 28. \\ x > 4 \end{cases}$$

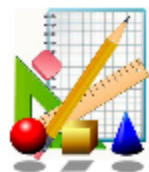
10,5 км/ч – скорость велосипедиста на пути из А в В.

10,5 + 7 = 17,5 (км/ч) – скорость на пути из В в А.

Ответ: 17,5

28 литров в минуту пропускает вторая труба.

Ответ: 28

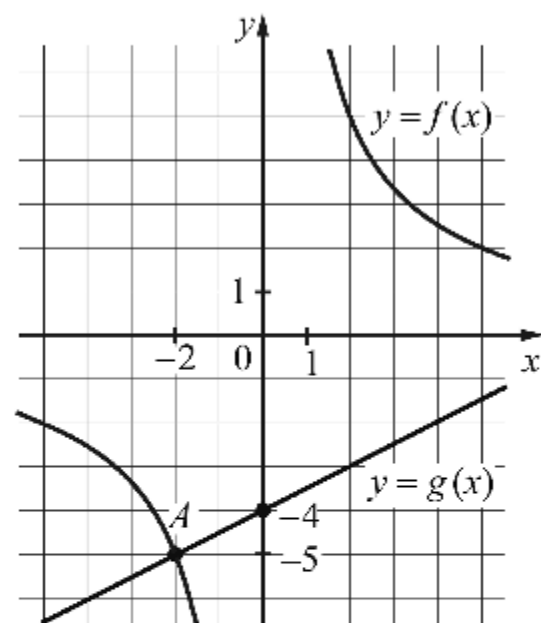


Задание 12. На рисунке изображены графики функций $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, пересекающиеся в точках А и В. Найдите абсциссу точки В. (ЕГЭ-2025)
Решение.

Шаг 1. Выполняем прикидку результата.

В данном случае: абсцисса точки В больше 8 (заключаем, исследуя графики: графики пересекутся в первой четверти, а прямая пересекает ось Ох в точке с абсциссой 8, то есть для части прямой, расположенной в первой четверти, характерно то, что $x > 8$).

Шаг 2. Конкретизируем формулы. Для гиперболы это можно сделать с помощью точки А(-2; -5). Уравнение прямой можно прочесть, используя геометрический смысл параметров. Получим: $f(x) = \frac{10}{x}$, $g(x) = \frac{x}{2} - 4$.

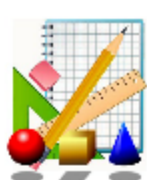


Шаг 3. Составляем модель «графики пересекаются», находим абсциссы точек пересечения. Проверяем достоверность результатов: действительно меньшая абсцисса равна -2, а большая больше 8?

Шаг 4. Читаем задание. Отвечаем на главный вопрос.

Ответ: 10

PS Проверить результат можно было и сопоставлением результатов подстановки полученного ответа в составленные формулы, задающие функции.



Задание 13.1 (Проект демоверсии ЕГЭ-2027)

В июле 2030 года планируется взять кредит 182 000 рублей в банке на три года.

Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей составит общая сумма платежей после полного погашения кредита, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами?

Советы: 1) во **всех** задачах на тему «Кредит» находить **долг до платежа после начисления процентов, платёж и остаток долга после платежа**,
2) *затраты времени на решение значительно сократятся, если числа «зашифровать» буквенной символикой (решение станет более простым – ещё один плюс).*

Решение. (Устно) Долг на конец предыдущего года составляет 100%, в январе банк увеличивает его на 20% (по условию), следовательно, **долг до платежа после начисления процентов составляет $(100 + 20)$** , т. е. 120% суммы долга на конец предыдущего года. В этой задаче таблицу заполняет по строкам слева-направо.

(Письменно) Пусть $182\,000 = A$, $120\% = \frac{120}{100} = \frac{6}{5} = k$. Пусть x рублей – ежегодный платёж. Тогда

Год	Долг до платежа после начисления процентов, (в рублях)	Платёж (в рублях)	Долг после выплаты (долг на конец года) (в рублях)
2030	-	-	A
2031	kA	x	$kA - x$
2032	$k(kA - x) = k^2A - kx$	x	$k^2A - kx - x$
2033	$k(k^2A - kx - x) = k^3A - k^2x - kx$	x	$k^3A - k^2x - kx - x = 0$

$$k^3 A - k^2 x - kx - x = 0;$$

$$k^2 x + kx + x = k^3 A;$$

$$x(k^2 + k + 1) = k^3 A;$$

$$x = \frac{k^3 A}{k^2 + k + 1}$$

Общая сумма платежей составит $3x = \frac{3k^3 A}{k^2 + k + 1}$ рублей, то есть

$$\frac{3 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^3 \cdot 182\,000}{\left(\frac{6}{5}\right)^2 + \frac{6}{5} + 1} = \frac{3 \cdot \frac{6^3}{5^3} \cdot 182\,000 \cdot 5^3}{\left(\frac{36}{5^2} + \frac{6}{5} + 1\right) \cdot 5^3} = \frac{3 \cdot 216 \cdot 182\,000}{36 \cdot 5 + 6 \cdot 25 + 125} = \frac{3 \cdot 216 \cdot 182\,000}{180 + 150 + 125} = \frac{3 \cdot 216 \cdot 182\,000}{455} =$$

$$= 648 \cdot 400 = 259\,200 \text{ рублей.}$$

Ответ: 259 200 (в заданиях с кратким ответом наименование указывать не нужно)

Задание 13.2. 15-го января был выдан полугодовой кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в процентах от кредита)	100%	90%	80%	70%	60%	50%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивается на 5%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Решение. (Устно) 1) Долг после выплаты составляет 100%, в конце месяца банк увеличивает его на 5% (по условию), следовательно, долг до платежа после начисления процентов составляет $(100 + 5)$, т. е. 105% суммы долга после выплаты.

2) **Таблица в любой задаче составляется по хронологии**, в данной задаче:

- платёж (по условию задачи он выполняется в первой половине месяца),
- остаток долга после выплаты,
- долг до платежа после начисления процентов (банк увеличивает долг в конце месяца);

а заполняется в этой задаче по столбцам (так как в условии обозначены процентные доли долга на 15-е число каждого месяца, то есть после выплаты):

- остаток долга после выплаты,
- долг до платежа после начисления процентов,
- платёж.

(Письменно) Пусть A рублей взяли в кредит, пусть $105\% = \frac{105}{100} = \frac{21}{20} = 1,05 = k$. Тогда (моделируем одну таблицу, но сейчас это оформим с помощью трёх таблиц, чтобы показать последовательность заполнения)

Месяц	Платёж (в рублях)	Долг после выплаты (в рублях)	Долг до платежа после начисления процентов, (в рублях)
январь	-	A	
февраль		$0,9A$	
март		$0,8A$	
апрель		$0,7A$	
май		$0,6A$	
июнь		$0,5A$	
июль		0	-

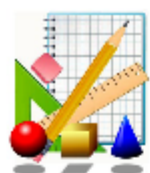
Месяц	Платёж (в рублях)	Долг после выплаты (в рублях)	Долг до платежа после начисления процентов, (в рублях)
январь	-	A	kA
февраль		$0,9A$	$0,9kA$
март		$0,8A$	$0,8kA$
апрель		$0,7A$	$0,7kA$
май		$0,6A$	$0,6kA$
июнь		$0,5A$	$0,5kA$
июль		0	-

Месяц	Платёж (в рублях)	Долг после выплаты (в рублях)	Долг до платежа после начисления процентов, (в рублях)
январь	-	A	kA
февраль	$kA - 0,9A$	$0,9A$	$0,9kA$
март	$0,9kA - 0,8A$	$0,8A$	$0,8kA$
апрель	$0,8kA - 0,7A$	$0,7A$	$0,7kA$
май	$0,7kA - 0,6A$	$0,6A$	$0,6kA$
июнь	$0,6kA - 0,5A$	$0,5A$	$0,5kA$
июль	$0,5kA$	0	-

Общая сумма выплат составляет (рублей): $4,5kA - 3,5A$, то есть

$4,5 \cdot 1,05A - 3,5A = 4,725A - 3,5A = 1,225A$ (рублей). Это на $0,225A$ рублей больше суммы, взятой в кредит. Следовательно, общая сумма выплат больше суммы самого кредита на $\frac{0,225A}{A} \cdot 100\% = 22,5\%$.

Ответ: 22,5 (наименование на ЕГЭ не указываем)



Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет **целое** число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на 3 млн рублей. Найдите наименьший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет больше 20 млн рублей.

Решение.

Год	Действия клиента, млн рублей	Сумма на счёте в начале года, млн рублей	Банк увеличит сумму на счёте на ... млн рублей	Сумма на счёте в конце года, млн рублей
1-й	-	x	$0,1x$	$1,1x$
2-й	-	$1,1x$	$0,1 \cdot 1,1x = 0,11x$	$1,21x$
3-й	+3	$1,21x + 3$	$0,121x + 0,3$	$1,331x + 3,3$
4-й	+3	$1,331x + 6,3$	$0,1331x + 0,63$	$1,4641x + 6,93$

По условию задачи через 4 года вклад будет больше 20 млн. рублей.

$$1,4641x + 6,93 > 20 \Leftrightarrow 1,4641x > 20 - 6,93 \Leftrightarrow 1,4641x > 13,07 \Leftrightarrow 14\,641x > 130\,700$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{130\,700}{14\,641} \Leftrightarrow x > 8\frac{13572}{14641}.$$

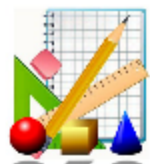
Наименьшее целое значение x , являющееся решением неравенства, – это 9.

9 млн. рублей – наименьший размер первоначального вклада.

Ответ: 9 млн. рублей.

PS 1) Можно не выполнять расчёт «на сколько банк увеличит сумму», а рассчитать сумму на счёте в конце года как 110% от суммы на счёте в начале года (тогда не нужен четвёртый столбец таблицы)

2) При выделении целой части ни в коем случае **нельзя** точное значение заменять приближённым.



ПОЛЕЗНЫЕ ПРИВЫЧКИ

1. Перед выполнением первого задания снять внутреннее напряжение (выполнить упражнения на расслабление)
2. Внутренне быть готовым к тому, что, как и на контрольной работе, может что-то сразу не получиться. Расстраиваться из-за этого не нужно. Нужно, не теряя драгоценные минуты, перейти к следующему заданию и постараться его выполнить.
3. Полученный в задании ответ обязательно сопоставить с текстом задачи: «Что требовалось найти? В каких единицах следует указать ответ?»
4. Полученный в задании ответ нужно проверить на достоверность: «Правдоподобен ли ответ? Не противоречит ли он условию задачи, жизненному опыту?»

ЗАПОЛНЕНИЕ БЛАНКА № 1

- Если все задания с кратким ответом выполнялись по порядку, без нарушений очередности, то не имеет значения, когда заполнять бланк ответов компьютерной проверки – сразу после выполнения задания и проверки ответа на правдоподобность или после решения всех задач первой части.
- Если какое-то задание было пропущено или задания выполнялись не в заданной последовательности, то бланк лучше заполнять сразу после выполнения задания и проверки ответа, чётко осознавая, в строку какого задания следует записать ответ

PS Если нужно будет изменить ответ, то используем поле замены ответов

ЖЕЛАЮ УСПЕХА!



**Благодарю
за внимание!**

Желаю успеха!

Панина Н.А.