Интенсив

2024-2025 учебный год

Решение экономических задач

(оптимизация)

Панина Нина Александровна,

учитель МБОУ «СШ № 33», г. Смоленска

Требования к развёрнутому ответу в задании 16

1) При построении математической модели **каждое** математическое выражение должно сопровождаться интерпретацией (толкованием смысла выражения).

2) Составляя модель, необходимо **отразить главную причинно-следственную связь**

3) Возможны различные способы решения, могут быть произвольными формы записи (текстовое сопровождение, таблица, логические схемы), но **из решения должен быть понятен ход рассуждений автора работы.**

Оценивается математическая грамотность и обоснованность решения.

Все методические пояснения, положения, замечания в презентации в дальнейшем выделены фиолетовым цветом. В развёрнутых ответах они должны быть учтены, но в самом письменном ответе участника ЕГЭ прописывать их не нужно.

1. Индивидуальный предприниматель в течение нескольких дней ежедневно покупал в магазине одежды 200 изделий на сумму 158 тыс. рублей: джинсы по 1000 рублей за штуку, рубашки – по 800 рублей за штуку, сумки по 400 рублей за штуку. Найдите максимальное число сумок, которое могло быть куплено предпринимателем в один из таких дней.

Источник условия задачи: https://alexlarin.net/ege/2025/trvar474.html

Задача с двумя целочисленными переменными. **Обратите внимание на способ оптимизации!**

Решение. Пусть n сумок и m рубашек купил предприниматель в один из дней, указанных в условии задачи. Тогда
$(200 - n - m)$ брюк он купил в этот день,
$400n$ рублей – стоимость сумок, купленных в этот день,
$800m$ рублей – стоимость рубашек, купленных в этот день,
$1000(200 - n - m)$ рублей – стоимость брюк,
$(400n + 800m + 1000(200 - n - m))$ рублей – стоимость покупки в этот день.

По условию задачи это 158 000 рублей.

$400n + 800m + 1000(200 - n - m) = 158\,000$;

$400n + 800m + 200\,000 - 1000n - 1000m = 158\,000$;

$200\,000 - 600n - 200m = 158\,000$;

$200\,000 - 158\,000 = 600n + 200m$;

$600n + 200m = 42\,000$;

$3n + m = 210$.

Далее решение можно продолжить двумя способами: общим (классическим) методом оптимизации и частным приёмом (методом минимакса – максимизируем одно, минимизируя другое).

Первый способ. Общий (классический) метод: **исследуем функцию** на наибольшее значение в области допустимых значений аргумента.

Так как $3n + m = 210$, то $n = 70 - \frac{1}{3}m$.

По смыслу задачи $n \geq 0,\ m \geq 0,\ 200 - n - m \geq 0$.

$$\begin{cases} 70 - \frac{1}{3}m \geq 0, \\ m \geq 0, \\ 200 - \left(70 - \frac{1}{3}m\right) - m \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} m \leq 210, \\ m \geq 0, \\ 130 - \frac{2}{3}m \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} m \leq 210, \\ m \geq 0, \\ m \leq 195; \end{cases} \quad 0 \leq m \leq 195.$$

Математическая модель задачи: исследовать на наибольшее значение целочисленную дискретную функцию $n = 70 - \frac{1}{3}m$, определённую при целых значениях переменной m из промежутка [0; 195].

Очевидно, что $n_{наиб.} = n(0) = 70$.

Заметим, что при $n = 70$, $m = 0$, $200 - n - m = 130$ – целое число.

70 сумок – наибольшее количество сумок, которое можно купить в один из дней.

Ответ: 70 сумок.

Второй способ (частный приём оптимизации): находим **наибольшее допустимое** значение одной из переменных и показываем, что это значение **является достоверным**, условие задачи при этом значении полностью выполняется.

$3n + m = 210$;

$m = 210 - 3n$.

По смыслу задачи $n \geq 0,\ m \geq 0,\ 200 - n - m \geq 0$.

$$\begin{cases} n \geq 0, \\ 210 - 3n \geq 0, \\ 200 - n - (210 - 3n) \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} n \geq 0, \\ 3n \leq 210, \\ 2n - 10 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} n \geq 0, \\ n \leq 70, \\ n \geq 5; \end{cases} \quad 5 \leq n \leq 70; \quad n_{\text{наиб.}} = 70.$$

Пояснение: полученный результат **нельзя признать окончательным**. Причина: не все условия задачи учтены (представленные рассуждения и работа с математической моделью не отражали целочисленность значений n, m, $(200 - n - m)$). Решение необходимо продолжить, исследуя на достоверность полученный результат.

Действительно, если $n = 70$, то $m = 210 - 3n = 0$; $200 - n - m = 130$.

130 брюк, 0 рубашек и 70 сумок было куплено в один из дней, что соответствует условию задачи.

Ответ: 70 сумок – наибольшее количество сумок, покупаемое предпринимателем в один из дней.

PS А) Если значения неизвестных величин могут быть исключительно целочисленными или натуральными, то лучше вводить обозначения не x, y, а n, m. Это непривычное обозначение может уберечь от ошибки, заставляя больше задумываться о смысле выполняемых действий.

Не забываем, что функция целочисленного или натурального аргумента не является непрерывной, она является дискретной. **Во всех точках области определения она является недифференцируемой**.

Б) Если **дискретная функция** является линейной или квадратичной, то можно провести исследование, опираясь на свойства функции.

Но если она не является таковой и требуется исследование на наибольшее (наименьшее) значение, то **необходимо**

1) дискретной функции поставить в соответствие непрерывную функцию, сохраняя структуру формулы.

2) Далее проводим исследование непрерывной функции с помощью производной.

3) Составляем суждения для функции целочисленного или натурального аргумента.

2. Сергей владеет двумя цехами, расположенными в разных районах города. В цехах производится абсолютно одинаковая продукция, но в первом цехе используется более современное оборудование. В результате, если рабочие второго цеха трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за это время они производят $2t$ единиц продукции.

Если же рабочие первого цеха трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за это время они производят $4t$ единиц продукции. В обоих цехах за каждый час работы рабочему платят 450 рублей. Сергей готов платить рабочим 1 640 250 рублей в неделю. На какое максимальное число единиц продукции он может рассчитывать?

Источник условия задачи: https://alexlarin.net/ege/2024/trvar437.html

Решение. На оплату труда выделено 1 640 250 рублей, за час работы рабочим платят 450 рублей. Следовательно, рабочие суммарно трудятся на этих станках 3645 часов в неделю.

Пусть n^2 часов в неделю трудятся рабочие первого цеха, тогда
$(3645 - n^2)$ часов в неделю трудятся рабочие второго цеха,
$4n$ единиц продукции производят за неделю рабочие первого цеха,
$2\sqrt{3645-n^2}$ единиц продукции производят за неделю рабочие второго цеха,
$\left(4n+2\sqrt{3645-n^2}\right)$ – общее число деталей, изготовленных за неделю. По условию задачи оно должно быть наибольшим.

По смыслу задачи $n \neq 0$, так как $2\sqrt{3645-n^2}$ – целое число. Тогда n^2, $4n$, $\left(3645-n^2\right)$, $2\sqrt{3645-n^2}$ – натуральные числа, следовательно, n – натуральное число, $1 \leq n \leq 60$.

Математическая модель задачи: найти наибольшее значение функции $y = 4n + 2\sqrt{3645-n^2}$, где n – натуральное число, $1 \leq n \leq 60$.

Функции $y(n)$ поставим в соответствие непрерывную функцию $f(x) = 4x + 2\sqrt{3645-x^2}$, где $x \in [1; 60]$, x – действительное число. Заметим, что при натуральных значениях аргумента значения функции $f(x)$ совпадают с соответствующими значениями функции $y(n)$.

$$f'(x)=\left(4x+2\sqrt{3645-x^2}\right)'=4+2\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{3645-x^2}}=4-\frac{2x}{\sqrt{3645-x^2}}=\frac{4\sqrt{3645-x^2}-2x}{\sqrt{3645-x^2}};$$

$$f'(x)=\frac{2\left(2\sqrt{3645-x^2}-x\right)}{\sqrt{3645-x^2}}$$

На промежутке [1; 60] нет таких x, в которых производная не существует;

$$f'(x)=0,\text{ если }\begin{cases}1\le x\le 60,\\ 2\sqrt{3645-x^2}-x=0;\end{cases}\quad\begin{cases}1\le x\le 60,\\ 2\sqrt{3645-x^2}=x;\end{cases}$$

$$\begin{cases}1\le x\le 60,\\ 4\left(3645-x^2\right)=x^2;\end{cases}\quad\begin{cases}1\le x\le 60,\\ 4\cdot 3645=5x^2;\end{cases}\quad\begin{cases}1\le x\le 60,\\ x^2=4\cdot 729;\end{cases}\quad x=54.$$

$$f(1)=4\cdot 1+2\sqrt{3645-1^2}=4+2\cdot\sqrt{3644}=4+\sqrt{14576}<270;$$

$$f(54)=4\cdot 54+2\sqrt{3645-54^2}=216+2\cdot\sqrt{729}=216+54=270;$$

$$f(60)=4\cdot 60+2\sqrt{3645-60^2}=240+2\cdot\sqrt{45}=240+\sqrt{180}<270.$$

$$f_{\text{наиб.}}=f(54)=270.$$

Так как 54 – натуральное число, то при n = 54 функция $y(n)$ принимает наибольшее значение.

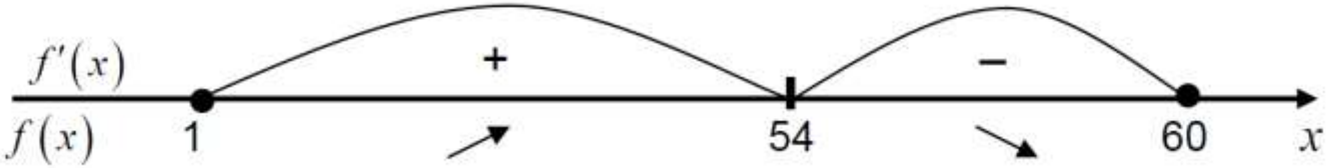
$$y_{\text{наиб.}}=y(54)=f(54)=270.$$

216 единиц продукции производят в 1-м цехе, 54 – во 2-м. 270 единиц продукции – наибольшее количество изделий, произведенных за неделю в двух цехах.

Ответ: на 270 единиц продукции.

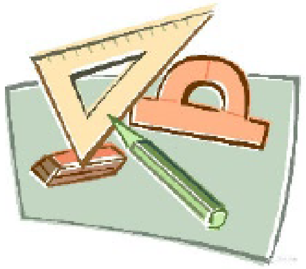
В данном случае исследование функции $f(x)$ на наибольшее значение на отрезке можно было провести и другим способом:

$$f'(x) = \frac{2\left(2\sqrt{3645 - x^2} - x\right)}{\sqrt{3645 - x^2}}$$



54 – единственная точка максимума на промежутке [1; 60], следовательно, при x = 54 функция $f(x)$ принимает наибольшее значение.

Если точка экстремума является единственной на промежутке, то изложенное выше исследование на наибольшее (наименьшее) значение на отрезке допускается.



3. (Обратная задача) Фёдор является владельцем двух заводов в разных городах. На заводе производятся абсолютно одинаковые изделия, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более современное оборудование.

В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $25t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t изделий, и, если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^3 часов в неделю, то за эту неделю они производят t изделий. За каждый час работы (на каждом из заводов) Фёдор платит рабочему 360 рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 30 изделий. Какую наименьшую сумму (в миллионах рублей) придётся тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

Источник условия задачи: https://math100.ru/variant-ege-prof-273/ Вариант от 23.12.2024

Решение. Пусть рабочие первого завода производят n изделий в неделю, тогда $(30 – n)$ изделий производят в неделю рабочие второго завода,

$25n^3$ часов в неделю суммарно трудятся рабочие на первом заводе,
$(30 - n)^3$ часов в неделю суммарно трудятся рабочие на втором заводе,
$(25n^3 + (30 - n)^3)$ часов в неделю суммарно трудятся рабочие на двух заводах,
$(360\cdot(25n^3 + (30 - n)^3))$ рублей в неделю суммарно требуется на оплату труда рабочих двух заводов.
По условию задачи эта сумма должна быть наименьшей.
По смыслу задачи n, $(30 - n)$, $25n^3$, $(30 - n)^3$ – целые неотрицательные числа, следовательно, n – целое неотрицательное число, $0 \le n \le 30$.
Математическая модель задачи: найти наименьшее значение функции
$y = 360\cdot(25n^3 + (30 - n)^3)$, где n – целое неотрицательное число, $0 \le n \le 30$.
Функции $y(n)$ поставим в соответствие непрерывную функцию
$f(x) = 360\cdot(25x^3 + (30 - x)^3)$, где $x \in [0; 30]$, x – действительное число.
Заметим, что при целых неотрицательных значениях аргумента значения функции $f(x)$ совпадают с соответствующими значениями функции $y(n)$.

$$f'(x)=\left(360\left(25x^3+(30-x)^3\right)\right)'=360\left(75x^2+3(30-x)^2\cdot(-1)\right)=$$

$$=360\left(75x^2-3\left(900-60x+x^2\right)\right)=360\left(72x^2+180x-2700\right)=360\cdot 36\left(2x^2+5x-75\right).$$

На промежутке [0; 30] нет таких x, в которых производная не существует;

$$f'(x)=0,\ \text{если}\ \begin{cases}0\le x\le 30,\\ 2x^2+5x-75=0;\end{cases}\qquad x=5.$$

$$\left|\begin{array}{l}2x^2+5x-75=0;\\ D=25+8\cdot 75=25(1+8\cdot 3)=25^2;\\ x_{1,2}=\dfrac{-5\pm 25}{4};\\ x_1=5,\quad x_2<0,\ \text{не удовлетворяет условию}\ 0\le x\le 30.\end{array}\right.$$

$$f(0)=360\cdot\left(25\cdot 0^3+30^3\right)=360\cdot 30^3;$$

$$f(5)=360\cdot\left(25\cdot 5^3+(30-5)^3\right)=360\cdot\left(25\cdot 5^3+25^3\right)=360\cdot 25^2\cdot 30;$$

$$f(30)=360\cdot\left(25\cdot 30^3+0^3\right)=360\cdot 25\cdot 30^3.$$

$$f_{\text{наим.}}=f(5)=360\cdot 25^2\cdot 30=360\cdot 625\cdot 30=6\,750\,000.$$

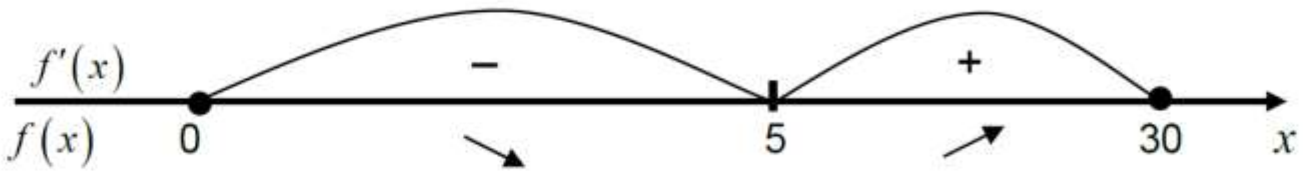
Так как 5 – целое неотрицательное число, то при n = 5 функция $y(n)$ принимает наименьшее значение.

$$y_{\text{наим.}}=y(5)=f(5)=6\,750\,000.$$

6 750 000 рублей, то есть 6,75 млн. рублей в неделю – наименьшая сумма для оплаты труда рабочих двух заводов.

Ответ: 6,75 млн. рублей в неделю.

Другой способ исследования функции на наименьшее значение в данном случае тоже уместен:



5 – единственная точка минимума на промежутке [0; 30], следовательно, при x = 5 функция $f(x)$ принимает наименьшее значение.

Так как 5 – целое неотрицательное число, то при n = 5 функция $y(n)$ принимает наименьшее значение.

$$y_{\text{наим.}} = y(5) = 360\cdot\left(25\cdot 5^3 + (30-5)^3\right) = 360\cdot\left(25^2\cdot 5 + 25^3\right) =$$

$$= 360\cdot 25^2\cdot 30 = 360\cdot 625\cdot 30 = 6\ 750\ 000.$$

6 750 000 рублей, то есть 6,75 млн. рублей в неделю – наименьшая сумма для оплаты труда рабочих двух заводов.

Ответ: 6,75 млн. рублей в неделю.

Получение целочисленного результата при исследовании функции нельзя считать окончательным. Необходимо проверить, принимает ли каждое выражение, символизирующее целое и неотрицательное значение, именно значение целое и неотрицательное.

Если хотя бы для одного выражения это будет нарушено, то предварительно найденное значение аргумента нужно изменить до ближайшего целого значения (если это допустимо, то и в сторону уменьшения, и в сторону увеличения) и повторно перепроверить все выражения на целочисленность и неотрицательность. И так до тех пор, пока **все** выражения, для которых допустимы только целые и неотрицательные значения, не станут таковыми. После этого составляем ответ на вопрос задачи.

4. Бригаду из 30 человек нужно распределить по двум объектам. Если на первом объекте работает p человек, то каждый из них получает $200p$ рублей. Если на втором объекте работает p человек, то каждый из них получает $(50p + 300)$ рублей.

Как нужно распределить рабочих по объектам, чтобы их суммарная зарплата оказалась наименьшей? Сколько рублей в этом случае придётся заплатить за сутки всем рабочим?

Источник условия задачи: **ЕГЭ**. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов/ под ред. И. В. Ященко. – М. Изд. «Национальное образование», 2023. Вариант 30.

Решение. Пусть n человек работают на первом объекте, тогда
$(30 - n)$ человек работают на втором объекте,
$200n$ рублей – зарплата одного рабочего на первом объекте за сутки,
$200n^2$ рублей – суммарная зарплата рабочих на первом объекте за сутки,
$(50(30 - n) + 300)$, то есть $(1800 - 50n)$ рублей – зарплата одного рабочего на втором объекте за сутки,
$(30 - n)(1800 - 50n)$ рублей – суммарная зарплата рабочих на втором объекте за сутки,
$(200n^2 + (30-n)(1800-50n))$ рублей – суммарная зарплата всех рабочих за сутки.
По условию задачи она должна быть наименьшей.

По смыслу задачи n – целое число, причём

$$\begin{cases} n \geq 0, \\ 30 - n \geq 0, \end{cases} \quad 0 \leq n \leq 30.$$

Математическая модель задачи: найти наименьшее значение функции $y = 200n^2 + (30 - n)(1800 - 50n)$, если n – целое число, принадлежащее отрезку [0; 30].

$$y = 200n^2 + 54\,000 - 1500n - 1800n + 50n^2;$$

$$y = 250n^2 - 3300n + 54\,000.$$

Дискретная квадратичная функция.

$n_0 = \dfrac{3300}{500} = 6{,}6$ – абсцисса вершины параболы.

$6{,}6 \in [0; 30]$, но 6,6 не является целым числом, поэтому не может быть значением n, при котором целочисленная квадратичная функция $y = 250n^2 - 3300n + 54\,000$ примет наименьшее значение.

Два ближайших целых числа, принадлежащих промежутку [0; 30], между которыми находится число 6,6, – это 6 и 7. Заметим, что при этих значениях n и $(30–n)$ являются целыми числами. Тогда наименьшее значение функции $y = 250n^2 - 3300n + 54\,000$ – это наименьшее из значений $y(6)$ и $y(7)$.

$$y(6) = 250 \cdot 36 - 3300 \cdot 6 + 54\,000 = 9000 - 19\,800 + 54\,000 = 43\,200;$$

$$y(7) = 250 \cdot 49 - 3300 \cdot 7 + 54\,000 = 12\,250 - 23\,100 + 54\,000 = 43\,150.$$

Наименьшее значение функции равно 43 150 и достигается при n = 7.

Следовательно, 7 человек нужно направить на первый объект, остальных 23 человека – на второй объект. При этом суммарная зарплата за смену окажется наименьшей и составит 43 150 рублей.
Ответ: 7 человек на первый объект, 23 человека на второй, наименьшая суммарная зарплата за смену составит 43 150 рублей.

PS 1) **В обосновании важно указать**, что абсцисса вершины параболы принадлежит (не принадлежит) области определения функции, (область определения устанавливается по смыслу задачи).

Вообще говоря, если абсцисса x_0 вершины параболы принадлежит области допустимых значений переменной, то наибольшее (наименьшее) значение функции достигается в абсциссе вершины параболы, а само наибольшее (наименьшее) значение совпадает с ординатой вершины параболы.

Если абсцисса x_0 вершины параболы не принадлежит закрытому промежутку – области допустимых значений переменной, то функция принимает наибольшее (наименьшее) значение в конечной точке промежутка, а не в вершине параболы.

Иногда для нахождения оптимального значения приходится исследовать не функцию, а выражение. **Если его алгебраические слагаемые не связаны между собой никаким дополнительным условием, являются независимыми друг от друга,** то можно применить свойства:

- если из некоторого числового значения вычитаем положительную величину, то результат вычитания меньше исходного числового значения,
- если к некоторому числовому значению прибавляем положительную величину, то результат сложения больше исходного числового значения.

Следовательно,

- для получения наибольшего значения выражения нужно вычитать как можно меньше, а прибавлять как можно больше;
- для получения наименьшего значения нужно вычитать как можно больше, а прибавлять как можно меньше.

5. У фермера есть два поля, каждое площадью 10 га. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно разделить между этим культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором – 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 250 ц/га, а на втором – 200 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 1500 рублей за центнер, а свёклу – по цене 1800 рублей за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Источник: **ЕГЭ** 2024. Математика. Профильный уровень. 15 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий от разработчиков ЕГЭ …М.: Изд. «Экзамен», 2024. Вариант 9.

Решение. Пусть x га отведено под картофель на первом поле и y га – на втором. Тогда

$(10 - x)$ га отведено под свёклу на первом поле,

$(10 - y)$ га отведено под свёклу на втором поле,

$200x$ ц картофеля соберут на первом поле,

$300y$ ц картофеля – на втором,

$(200x + 300y)$ ц картофеля соберут с двух полей,

$250(10 - x)$ ц свёклы соберут на первом поле,
$200\ (10 - y)$ ц свёклы – на втором,
$(250(10 - x) + 200(10 - y))$, то есть $(4500 - 250x - 200y)$ ц свёклы соберут с двух полей,
$1500(200x + 300y)$, то есть $(300\,000x + 450\,000y)$ рублей – доход фермера от продажи картофеля,
$1800(4500 - 250x - 200y)$, то есть $(8\,100\,000 - 450\,000x - 360\,000y)$ рублей – доход фермера от продажи свёклы,
$(300\,000x + 450\,000y + 8\,100\,000 - 450\,000x - 360\,000y)$, то есть
$(8\,100\,000 - 150\,000x + 90\,000y)$ рублей – доход фермера от продажи всей продукции.
Доход фермера окажется наибольшим, если x примет наименьшее допустимое значение, а y – наибольшее допустимое значение.
Наименьшее допустимое значение x – это 0, наибольшее допустимое значение y – это 10. Тогда наибольший доход составит
$(8\,100\,000 - 0 + 900\,000)$, то есть 9 000 000 рублей.
Ответ: 9 млн. рублей – наибольший доход фермера.

6. В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 50 рабочих, каждый из которых готов трудиться 6 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1 кг алюминия или 3 кг никеля.

На второй шахте имеется 180 рабочих, каждый из которых готов трудиться 6 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 1 кг никеля. Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 3 кг алюминия приходится 2 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

https://math100.ru/variant-ege-prof-267/ Вариант от 11.11.2024

Решение.

Пусть n человек добывают алюминий на первой шахте, тогда

$(50 - n)$ человек добывают никель на первой шахте,

$6 \cdot 1 \cdot n$, то есть $6n$ килограммов алюминия и $6 \cdot 3(50 - n)$, то есть $18(50 - n)$ килограммов никеля добывают за смену на первой шахте.

Пусть k человек добывают алюминий на второй шахте, тогда $(180 – k)$ человек добывают никель на второй шахте, $6 \cdot 3k$, то есть $18k$ килограммов алюминия и $6 \cdot 1(180 – k)$, то есть $6(180 – k)$ килограммов никеля добывают за смену на второй шахте, $(6n + 18k)$ килограммов алюминия и $(18(50 – n) + 6(180 – k))$ килограммов никеля поступит на завод.

По условию задачи для изготовления сплава на 3 кг алюминия приходится 2 кг никеля.

PS Эту информацию из условия задачи воспринимаем так: количество килограммов (масса) алюминия составляет 3 части, количество килограммов (масса) никеля составляет 2 части. Зная это, уравнение можно составить следующим образом:

$$\underbrace{2 \text{ раза по } 3 \text{ части}}_{\textit{алюминий}} = \underbrace{3 \text{ раза по } 2 \text{ части}}_{\textit{никель}}.$$

Но надёжнее другой способ:

$$\underbrace{1 \text{ часть}}_{\textit{алюминий}} = \underbrace{1 \text{ часть}}_{\textit{никель}}$$

По условию задачи для изготовления сплава на 3 кг алюминия приходится 2 кг никеля. Тогда

$$\frac{6n+18k}{3}=\frac{18(50-n)+6(180-k)}{2};$$

$$2n+6k=9(50-n)+3(180-k);$$

$$2n+6k=450-9n+540-3k;$$

$$6k+3k=990-9n-2n;$$

$$9k=990-11n;$$

$$k=110-\frac{11n}{9}.$$

$$180-k=180-\left(110-\frac{11n}{9}\right)=70+\frac{11n}{9}.$$

На второй шахте $\left(110-\frac{11n}{9}\right)$ человек добывают алюминий и $\left(70+\frac{11n}{9}\right)$ человек – никель.

По смыслу задачи n и k – целые неотрицательные числа, причём

$$\begin{cases} n \ge 0, \\ 50 - n \ge 0, \\ 110 - \dfrac{11n}{9} \ge 0, \\ 70 + \dfrac{11n}{9} \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \le n \le 50, \\ 90 - n \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \le n \le 50, \\ n \le 90; \end{cases} \quad 0 \le n \le 50.$$

Завод произведёт $\left(6n + 18k + 18(50 - n) + 6(180 - k)\right)$ кг сплава.

$$6n + 18\left(110 - \frac{11n}{9}\right) + 18(50 - n) + 6\left(70 + \frac{11n}{9}\right) =$$

$$= 6n + 18 \cdot 110 - 22n + 18 \cdot 50 - 18n + 6 \cdot 70 + \frac{22n}{3} =$$

$$= 60 \cdot (33 + 15 + 7) - \frac{80n}{3} = 60 \cdot 55 - \frac{80n}{3} = 3300 - \frac{80n}{3}$$

По условию задачи количество сплава должно быть наибольшим.

Математическая модель задачи: найти наибольшее значение функции $y = 3300 - \frac{80n}{3}$, если n – целое число, принадлежащее отрезку [0; 50].

$y = 3300 - \frac{80n}{3}$, где n – целое число, принадлежащее отрезку [0; 300], – линейная дискретная убывающая функция. Тогда $y_{\text{наиб.}} = y(0) = 3300 - \frac{80 \cdot 0}{3} = 3300.$

Проверим, являются ли целыми и неотрицательными значения выражений для обозначения количества рабочих.

$n = 0$ – целое неотрицательное число,

$50 - n = 50 - 0 = 50$ – целое неотрицательное число,

$k = 110 - \frac{11n}{9} = 110 - \frac{11 \cdot 0}{9} = 110$ – целое неотрицательное число,

$180 - k = 180 - 110 = 70$ – целое неотрицательное число.

Убедились, что 3300 кг сплава действительно является наибольшим количеством сплава, произведённого на заводе.

Ответ: 3300 кг сплава.

7. Производство x единиц продукции обходится в $q = 0{,}5x^2 + 2x + 5$ млн. рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу продукции годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн. рублей) составляет $px – q$.
Завод выпускает продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p через четыре года суммарная прибыль составит не менее 52 млн. рублей?
https://math100.ru/variant-ege-prof-271/ Вариант от 09.12.2024

Решение. По смыслу задачи в течение 4 лет объём производства и продаж, цена продукции не изменяются. Следовательно, не изменяется и годовая прибыль. Суммарная прибыль через четыре года составит не менее 52 млн. рублей (по условию), тогда годовая прибыль составит не менее 13 млн. рублей.

Пусть y млн. рублей – годовая прибыль. Она составляет (в млн. рублей)

$$y = px - q = px - (0{,}5x^2 + 2x + 5) = px - 0{,}5x^2 - 2x - 5 = -0{,}5x^2 + (p - 2)\,x - 5$$

и зависит не только от цены товара, но и от объёма продаж.

По условию задачи завод выпускает продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. Следовательно, завод выпускает в год $(p - 2)$ единиц продукции, так как $y = -0{,}5x^2 + (p - 2)x - 5$ – квадратичная функция, её графиком является парабола, ветви которой направлены вниз, наибольшее значение функции соответствует вершине параболы. Тогда годовая прибыль составляет (в млн. рублей)

$$y = -0{,}5(p-2)^2 + (p-2)^2 - 5 = 0{,}5(p-2)^2 - 5.$$

Математическая модель задачи: найти наименьшее значение p, при котором $0{,}5(p-2)^2 - 5 \geq 13$.

$$0{,}5(p-2)^2 \geq 18;$$

$$(p-2)^2 \geq 36;$$

$$\left[\begin{array}{l} p-2 \leq -6 \\ p-2 \geq 6; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} p \leq -4 \\ p \geq 8. \end{array}\right.$$

По смыслу задачи p принимает положительные значения, тогда $p \geq 8$,
8 тыс. рублей – наименьшая цена единицы продукции.

Ответ: 8 тыс. рублей.

8. Фирма собирается построить новый цех. Строительство нового цеха стоит 1060 млн. рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции в этом цехе равны $0,2x^2+2x+10$ млн. рублей в год.

Если продукцию цеха продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в миллионах рублей) за один год составит $px-\left(0,2x^2+2x+10\right)$. Когда цех будет построен, каждый год фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. В первый год после постройки цеха цена продукции составит 18 тыс. рублей за единицу, каждый следующий год цена продукции увеличивается на 1 тыс. рублей за единицу. За сколько лет окупится строительство цеха?

Решение. По условию x тыс. единиц продукции производят,
p тыс. рублей – стоимость 1 тыс. единиц товара,
$(0,2x^2+2x+10)$ млн. рублей в год – затраты на производство,
px млн. рублей – годовая выручка после продажи товара,
$\left(px-\left(0,2x^2+2x+10\right)\right)$ млн. рублей в год – прибыль. По условию задачи она должна быть наибольшей.

Рассмотрим функцию $f(x)=px-\left(0,2x^2+2x+10\right)$, где p – фиксированное (в течение года) число, x > 0.

$$f(x)=px-0,2x^2-2x-10,$$

$$f(x)=-0,2x^2+(p-2)x-10.$$

Квадратичная функция. График – часть параболы (так как x > 0), ветви направлены вниз. $x_0=\frac{-p+2}{-0,4}=\frac{5(p-2)}{2}$ – абсцисса вершины параболы.

Так как $p_{\text{наим.}}=18$, то $x_0>0$. Следовательно,

$$f_{\text{наиб.}}=f(x_0)=f\left(\frac{5(p-2)}{2}\right)=-0,2\left(\frac{5(p-2)}{2}\right)^2+(p-2)\cdot\frac{5(p-2)}{2}-10=$$

$$=\frac{-0,2\cdot 25(p-2)^2}{4}+\frac{5(p-2)^2}{2}-10=\frac{5(p-2)^2}{4}-10.$$

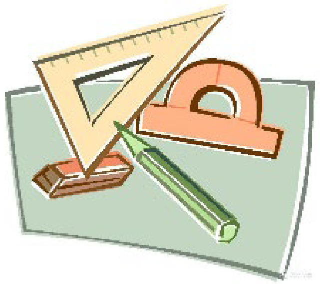
Следовательно, для того, чтобы прибыль была наибольшей, нужно выпускать в год $\frac{5(p-2)}{2}$ тысяч единиц продукции. При этом прибыль составит $\left(\frac{5(p-2)^2}{4}-10\right)$ млн. рублей.

Выясним, через сколько лет окупится строительство цеха.

Год	Цена, тыс. рублей	Прибыль фирмы за год, млн. рублей	Суммарная прибыль за весь период, млн. рублей
1-й	18	$\frac{5(18-2)^2}{4}-10=\frac{5\cdot\cancel{16}^{4}\cdot16}{\cancel{4}_{1}}-10=320-10=310$	310
2-й	19	$\frac{5(19-2)^2}{4}-10=\frac{5\cdot17^2}{4}-10=\frac{5\cdot289}{4}-10=351,25$	661,25
3-й	20	$\frac{5(20-2)^2}{4}-10=\frac{5\cdot18\cdot18}{4}-10=5\cdot9\cdot9-10=395$	1056,25 Меньше 1060
4-й	21	$\frac{5(21-2)^2}{4}-10=\frac{5\cdot19^2}{4}-10=\frac{5\cdot361}{4}-10=441,25$	1497,5 Больше 1060

Следовательно, строительство цеха окупится через 4 года.

Ответ: через 4 года.



9. Алексей приобрёл ценную бумагу за 8 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 1 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 8%.

В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через 25 лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

Источник условия задачи https://math-ege.sdamgia.ru/test?id=80101977 (Вариант 3, январь 2025 года)

Задачу можно решить аналитически (оптимизация классическим методом с исследованием функции с помощью производной), но более простым и менее затратным по времени является логическое решение, опирающееся на несложные расчёты. Решим задачу вторым способом.

Решение. Если ценная бумага хранится у Алексея, то она приносит годовую прибыль в 1 тыс. рублей. До тех пор, пока банковские 8% обеспечивают прибыль менее 1 тыс. рублей, бумагу продавать не нужно. В начале того года, когда прибыль банка впервые превысит 1 тыс. рублей, ценную бумагу нужно продать и вырученные деньги нужно положить на банковский счёт. Так будет обеспечена наибольшая ежегодная прибыль, а, следовательно, и через 25 лет суммарная прибыль окажется наибольшей, поэтому и сумма на банковском счёте окажется наибольшей.

Пусть в начале n-го года Алексей продаст ценную бумагу. Тогда он хранил её $(n-1)$ год. К этому времени стоимость бумаги составила $(8+1\cdot(n-1))$, то есть $(7+n)$ тыс. рублей. Следовательно, первоначальная сумма на банковском счёте $(7+n)$ тыс. рублей. Через год после открытия счёта прибыль от вклада составит $0{,}08(7+n)$ тыс. рублей. Прибыль окажется больше 1 тыс. рублей, если

$$0{,}08(7+n)>1;$$

$$8(7+n)>100;$$

$$7+n>12{,}5;$$

$$n>5{,}5.$$

По смыслу задачи n целое число. Тогда $n=6$.

В начале 6-го года ценную бумагу нужно продать и положить вырученные деньги на банковский счёт.

Ответ: в начале 6-го года.

ИТОГ:

1. Если значения неизвестных величин могут быть исключительно целочисленными или натуральными, то лучше вводить обозначения не x, y, а n, m. Это непривычное обозначение может уберечь от ошибки, заставляя больше задумываться о смысле выполняемых действий.

2. Не забываем, что функция целочисленного или натурального аргумента не является непрерывной, она является дискретной. **Во всех точках области определения она является недифференцируемой**.

3. Если **дискретная функция** является линейной или квадратичной, то можно провести исследование, опираясь на свойства функции.

Но если она не является таковой и требуется исследование на наибольшее (наименьшее) значение, то **необходимо**

1) дискретной функции поставить в соответствие непрерывную функцию, сохраняя структуру формулы,

2) провести исследование непрерывной функции с помощью производной,

3) составить суждения для функции целочисленного или натурального аргумента.

4. Получение целочисленного результата при исследовании функции нельзя считать окончательным. Необходимо проверить, принимает ли каждое выражение, символизирующее целое и неотрицательное значение, именно значение целое и неотрицательное.

Если хотя бы для одного выражения это будет нарушено, то предварительно найденное значение аргумента нужно изменить до ближайшего целого значения (если это допустимо, то и в сторону уменьшения, и в сторону увеличения) и повторно перепроверить все выражения на целочисленность и неотрицательность. И так до тех пор, пока **все** выражения, для которых допустимы только целые и неотрицательные значения, не станут таковыми. После этого составляем ответ на вопрос задачи.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

ЖЕЛАЮ УСПЕХОВ!

Панина Н.А.
n.a.panina@mail.ru