Интенсив

2024-2025 учебный год

Решение тригонометрических уравнений и уравнений, сводящихся к ним

Панина Нина Александровна,

учитель МБОУ «СШ № 33», г. Смоленска

Выполняя любое задание с развёрнутым ответом, следует иметь ввиду, что:

1. Возможны различные способы решения и записи развернутого решения. Главное требование

- **из решения должен быть понятен ход рассуждений автора работы**.

В остальном (метод, форма записи) решение может быть произвольным.

Следовательно, при выполнении заданий с развернутым ответом части 2 экзаменационной работы в бланке ответов № 2 должны быть записаны **полное обоснованное решение и ответ для каждой задачи**.

Оценивается

- математическая грамотность решения,
- полнота обоснования.

2. При решении задачи можно использовать без доказательств и ссылок математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

Математические факты, освоенные в заочных математических школах, элективных курсах, можно применять без доказательства, но применяемую теорему нужно сформулировать.

Проверка выполнения заданий 13–19 проводится экспертами на основе разработанной системы критериев оценивания

Критерии оценивания задания 13

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте ***а***, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта ***а*** и пункта ***б***	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Комментарий: к вычислительным ошибкам относятся ошибки при выполнении сложения, вычитания, умножения, деления. И только!

Ошибки при вычислении значения степени, корня, при указании значений арксинуса числа (арккосинуса числа и так далее) не относятся к вычислительным, а, следовательно, ведут к оценке «0 баллов».

Обратите внимание, в критериях идёт речь о вычислительной ошибке в единственном числе.

Следовательно, даже 2 вычислительные ошибки приводят к оценке «0 баллов».

Ещё один момент, если допущена вычислительная ошибка и **получен ответ только в пункте a)** (неправильный, из-за вычислительной ошибки), то оценка «0 баллов» потому, что в критериях сказано, что при этом должны быть верно выполнены все шаги в пунктах a) и б).

Заметим и то, что, если пункт a) выполнен на 0 баллов, то пункт б) НЕ ПРИНОСИТ баллы (автоматически оценивается в 0 баллов).

Следовательно, важно освоить методы безупречного выполнения и задачи a), и задачи б).

Ещё один аспект:

- Можно выполнить задание на черновике, а потом переписать решение в чистовик?

Ответ: **не желательно**.

- Почему не нужно так делать?

Ответ: *первая причина* – потеря драгоценного времени (не будет возможности выполнить другие задания с развёрнутым ответом из-за дублирования работы во второй части экзамена). *Вторая причина* ещё более серьёзная – если при переписывании с черновика в какой-либо строке окажется ошибка, то будет зафиксировано 2 ошибки. 1-я: неправильный математический результат в строке ошибочного переписывания. 2-я: следующая за ошибочной строка не вытекает из предыдущей – а это ещё одна ошибка. Нетрудно догадаться, что последует оценка 0 баллов.

Понятие «ошибка переписывания с черновика» в критериях оценивания отсутствует, а поэтому не может оказаться уважительной причиной ненулевого оценивания.

Ситуация трактуется как «правильный ответ при ошибочном решении». Но во второй части экзамена оценка выставляется не за правильный ответ, а за грамотное, полное, верное обоснование причинно-следственных связей (это в первую очередь влияет на оценку) и результат (позволяет уточнить оценку).

- Нужно сразу в бланке № 2 выполнять задания второй части?

Ответ: можно (если это действительно необходимо) выбрать путь решения на черновике, но как только появится главная идея решения, необходимо от черновика отказаться и перейти на чистовик.

- А если эта идея окажется неправильной?

Ответ: ничего страшного. Это расценивается как поиск решения. Зачёркиваем (аккуратно) и решаем задание иным способом. На оценку это никак не повлияет.

Задание 13
(открытый вариант 301 ЕГЭ- 2024)

13 а) Решите уравнение

$$\cos 2x - \sqrt{2}\sin(x+\pi) - 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

$a)$ $\cos 2x - \sqrt{2}\sin(x+\pi) - 1 = 0;$

$\cos 2x + \sqrt{2}\sin x - 1 = 0;$

$\cos^2 x - \sin^2 x + \sqrt{2}\sin x - 1 = 0;$

$1 - 2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x - 1 = 0;$

$2\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x = 0;$

$\sin x\left(2\sin x - \sqrt{2}\right) = 0;$

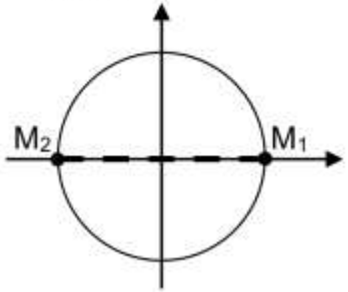
$\sin x = 0$ или $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

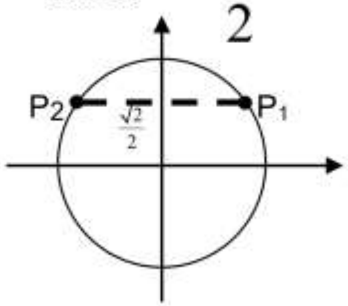
Совет 1: в целях исключения ошибки не полагайтесь на память и воображение, а изобразите множества решений полученных уравнений на тригонометрической окружности.

Это совет, подобные действия не являются обязательными для участника ЕГЭ, но статистика ошибок показывает, что осмысление слагаемого (через зрительное восприятие на окружности), добавляемого к главному углу (πk или $2\pi k$ и так далее, где k – любое целое) помогает правильно выполнить задание.

Совет 2: при переходе с одного листа на другой, пожалуйста, не выполняйте никаких преобразований. Просто перепишите последнюю строку на следующий лист и продолжите решение.

$\sin x = 0$ или $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$



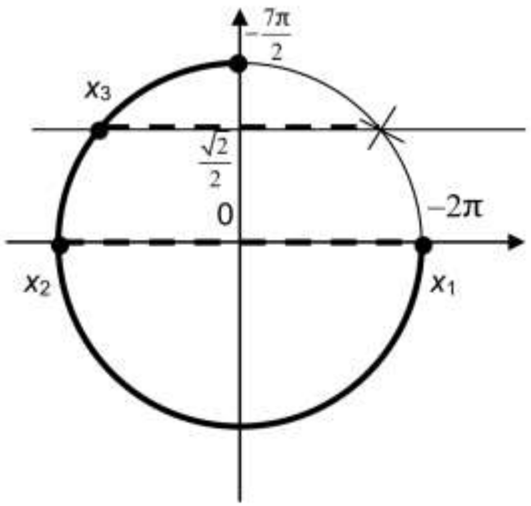


$x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$$\left[\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{4} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}, \\ x &= \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}\right.$$

б) $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

1-й способ



$$x_1 = -2\pi,$$
$$x_2 = -2\pi - \pi = -3\pi,$$
$$x_3 = -3\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{13\pi}{4}.$$

Решение по тригонометрической окружности признаётся обоснованным, если

- на чертеже ярко выделена **дуга**, соответствующая отрезку, указанному в условии,
- чётко указаны **концы дуги** (открытые или закрытые) и графически, и аналитически (**точки выделены на чертеже и подписаны**),

- отбор корней по тригонометрической окружности выполнен ИЛИ по уравнениям, на которые распадается исходное уравнение (в данном случае, это уравнения $\sin x = 0, \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$), **<u>на осях отмечены точки</u>** (в разбираемом примере, это 0 и $\frac{\sqrt{2}}{2}$), выполнены необходимые **построения** для получения точек на окружности (в данном случае, это перпендикуляры к оси синусов),
- ИЛИ отбор корней по тригонометрической окружности выполнен по множеству корней исходного уравнения (в данном случае, это $x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z},$ $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$), выполнены необходимые **построения** для получения точек на окружности (в данном случае, это радиусы),

- проведен **анализ принадлежности** полученных на окружности точек выделенной дуге,
- **точки**, принадлежащие дуге, **выделены** (закрашенный кружочек); точки, не принадлежащие, – **удалены** (символами удаления являются выкалывание (как в школьном учебнике, пустой кружочек) и символ, напоминающий небольшой крест (это две встречные стрелки, которые сходятся в одной точке и каждая из которых удаляет конец движения по окружности), использовать можно любой из указанных символов,
- рядом с окружностью <u>составлены **формулы расчёта**</u> отбираемых корней, вычислены корни, принадлежащие указанному в условии промежутку,
- **корни подписаны на окружности** (на окружности можно подписывать, как на образце: не -3π, а x_2, не -2π, а x_1, не $-\frac{13\pi}{4}$, а x_3, при этом рядом с окружностью есть расшифровка этих значений).

PS Крест – это символ удаления, а не выделения. К сожалению, некоторые участники ЕГЭ именно так, выделяют корни, принадлежащие промежутку. **Неправильное использование символики.**

Выполняя отбор по окружности, в момент анализа принадлежности получаемых на окружности точек выделенной дуге, мы устанавливаем количество корней, принадлежащих промежутку. А это один из неявных способов доказательства, что других корней, (кроме указанных 3-х в разобранном примере), не будет.

б) $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

2-й способ

$x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z},$

$-\frac{7\pi}{2} \le \pi k \le -2\pi;$

$-\frac{7}{2} \le k \le -2;$

$-3{,}5 \le k \le -2.$

Так как $k \in \mathbb{Z}$, то $k = -3; -2.$

Тогда $x = -2\pi,\ \ x = -3\pi.$

$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z},$

$-\frac{7\pi}{2} \le \frac{\pi}{4} + 2\pi m \le -2\pi;$

$-14\pi \le \pi + 8\pi m \le -8\pi;$

$-14 \le 1 + 8m \le -8;$

$-15 \le 8m \le -9;$

$-\frac{15}{8} \le m \le -\frac{9}{8};$

$-1\frac{7}{8} \le m \le -1\frac{1}{8}.$

Так как $m \in \mathbb{Z}$, то решений нет

$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z},$

$-\frac{7\pi}{2} \le \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \le -2\pi;$

$-14\pi \le 3\pi + 8\pi n \le -8\pi;$

$-14 \le 3 + 8n \le -8;$

$-17 \le 8n \le -11;$

$-\frac{17}{8} \le n \le -\frac{11}{8};$

$-2\frac{1}{8} \le n \le -1\frac{3}{8}.$

Так как $n \in \mathbb{Z}$, то $n = -2.$

Тогда $x = \frac{3\pi}{4} - 4\pi = -\frac{13\pi}{4}.$

Выполняя отбор корней неравенством (2-й способ), устанавливаем, что *указанному промежутку принадлежат решения лишь при полученных значениях параметра из множества целых чисел*.

Решение **позволяет рассчитать корни**, принадлежащие промежутку, **и одновременно является доказательством**, что ни при каких других значениях параметра мы не получим ответ из промежутка.

Это самый строгий способ отбора корней.

Недостатки способа:

1. Затратный по времени
2. Наиболее уязвимый при вычислениях

б) $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$ 3-й способ

Метод перебора. Часто встречается в экзаменационных работах, но в большинстве случаев решение неправильное.

Решение любой задачи (и на ЕГЭ в том числе) **заключается в отыскании всех верных ответов и доказательстве, что других ответов нет.**

Неправильность решения этим методом чаще всего заключается в отсутствии доказательства, что других корней, кроме тех, которые указаны участником экзамена, нет.

Отбирая корни методом перебора, работаем с формулами решений уравнения. Это $x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z},$ $x=\frac{\pi}{4}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z},\quad x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ в разобранном примере. Линейные возрастающие функции, заданные на множестве целых чисел. Поэтому **правильное решение должно строиться «по методу артиллериста»:**
при последовательном увеличении значения параметра на 1 нужно обеспечить

- **недолёт до промежутка,**
- **попадание в промежуток,**
- **перелёт.**

И даже, если попадание совпало с правым концом промежутка, то перелёт, всё равно, является обязательным!!!!!!!!!!!!!!!!!

Выполним задание этим способом.

1) $x = \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$

Если $k = -4$, то $x = -4\pi$. $\quad -4\pi \notin \left[-\dfrac{7\pi}{2};\ -2\pi\right],\quad -4\pi < -\dfrac{7\pi}{2}.$

Если $k = -3$, то $x = -3\pi$. $\quad -3\pi \in \left[-\dfrac{7\pi}{2};\ -2\pi\right].$

Если $k = -2$, то $x = -2\pi$. $\quad -2\pi \in \left[-\dfrac{7\pi}{2};\ -2\pi\right].$

Если $k = -1$, то $x = -\pi$. $\quad -\pi \notin \left[-\dfrac{7\pi}{2};\ -2\pi\right],\quad -\pi > -2\pi.$

2) $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m,\ \ m \in \mathbb{Z}$

Если $m = -2$, то $x = \frac{\pi}{4} - 4\pi = -\frac{17\pi}{4}$. $\quad -\frac{17\pi}{4} \notin \left[-\frac{7\pi}{2};\ -2\pi\right],\ \ -\frac{17\pi}{4} < -\frac{7\pi}{2}$.

Если $m = -1$, то $x = \frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7\pi}{4}$. $\quad -\frac{7\pi}{4} \notin \left[-\frac{7\pi}{2};\ -2\pi\right],\ \ -\frac{7\pi}{4} > -2\pi$.

Следовательно, на отрезке $\left[-\frac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$ нет корней уравнения, которые можно рассчитать по формуле $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m,\ \ m \in \mathbb{Z}$.

3) $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ \ m \in \mathbb{Z}$

Если $n = -3$, то $x = \frac{3\pi}{4} - 6\pi = -\frac{21\pi}{4}$. $\quad -\frac{21\pi}{4} \notin \left[-\frac{7\pi}{2};\ -2\pi\right],\quad -\frac{21\pi}{4} < -\frac{7\pi}{2}.$

Если $n = -2$, то $x = \frac{3\pi}{4} - 4\pi = -\frac{13\pi}{4}$. $\quad -\frac{13\pi}{4} \in \left[-\frac{7\pi}{2};\ -2\pi\right].$

Если $n = -1$, то $x = \frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{5\pi}{4}$. $\quad -\frac{5\pi}{4} \notin \left[-\frac{7\pi}{2};\ -2\pi\right],\quad -\frac{5\pi}{4} > -2\pi.$

Доказали, что отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$ принадлежат лишь корни $-\frac{13\pi}{4}; -3\pi; -2\pi$.

Ответ: а) $\pi k,\ k \in \mathbb{Z},\quad \frac{\pi}{4} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z},\quad \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{13\pi}{4}; -3\pi; -2\pi$.

Рассмотрим уравнение с ограничениями.

Высокий уровень осмысления выполняемых действий позволяет избежать усложнения решения, напрасных трат времени

Решите уравнение $\log_{\sin x}\left(\sin 2x + 2\sqrt{3}\sin^2 x + \sin x\right) = 1.$

Решение.

$$\log_{\sin x}\left(\sin 2x + 2\sqrt{3}\sin^2 x + \sin x\right) = 1;$$

$$\begin{cases} \sin x > 0, \\ \sin x \neq 1, \\ \sin 2x + 2\sqrt{3}\sin^2 x + \sin x > 0, \\ \sin 2x + 2\sqrt{3}\sin^2 x + \sin x = \sin x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x > 0, \\ \sin x \neq 1, \\ \sin 2x + 2\sqrt{3}\sin^2 x = 0; \end{cases}$$

$$\left|\begin{array}{l}\sin 2x+2\sqrt{3}\sin^2 x=0;\\ 2\sin x\cos x+2\sqrt{3}\sin^2 x=0;\\ 2\sin x\left(\cos x+\sqrt{3}\sin x\right)=0\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}\sin x>0,\\ \sin x\neq 1,\\ 2\sin x\left(\cos x+\sqrt{3}\sin x\right)=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}\sin x>0,\\ \sin x\neq 1,\\ \cos x+\sqrt{3}\sin x=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin x>0,\\ \sin x\neq 1,\\ \dfrac{\cos x}{\sin x}+\dfrac{\sqrt{3}\sin x}{\sin x}=\dfrac{0}{\sin x};\end{cases}\qquad \begin{cases}\sin x>0,\\ \sin x\neq 1,\\ \operatorname{ctg} x+\sqrt{3}=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}\sin x>0,\\ \sin x\neq 1,\\ \operatorname{ctg} x=-\sqrt{3}.\end{cases}$$

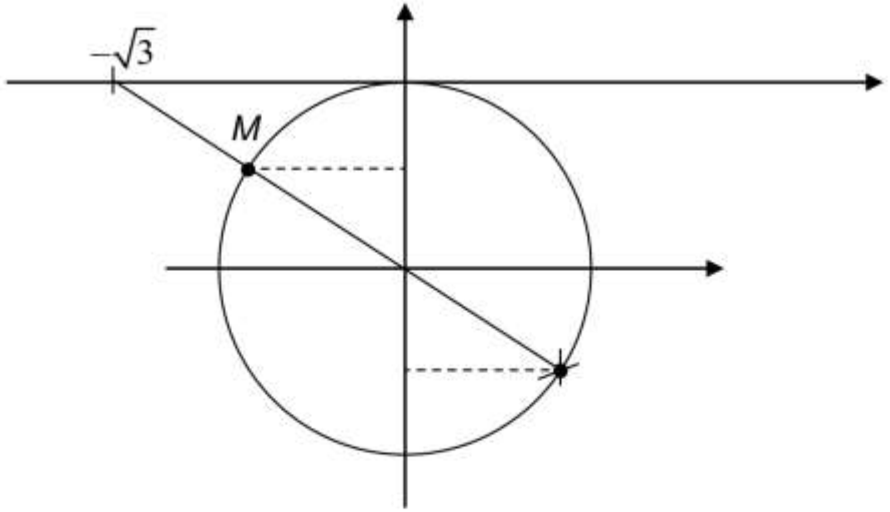
Можно решить каждое неравенство, уравнение системы, а затем найти пересечение полученных множеств. Появится решение полученной системы.

Это верное решение, но можно решить проще:

- изобразим множество решений уравнения на тригонометрической окружности,
- выберем на окружности те решения, которые удовлетворяют ограничениям.

Получим *решение системы* в графической форме. После этого составим аналитическую формулу решений.

$$\begin{cases} \sin x > 0, \\ \sin x \neq 1, \\ \operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}. \end{cases}$$



$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

PS Заметим, что такой подход к решению системы значительно сократил затраты времени на выполнение задания

Обзор тригонометрических заданий за последние годы (источники: открытые варианты КИМ ЕГЭ)

13

а) Решите уравнение

$$\cos 2x - \sqrt{2}\sin(x+\pi) - 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

13

а) Решите уравнение

$$\sin x \cdot \cos 2x + \sqrt{2}\cos^2 x + \sin x = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

13

а) Решите уравнение

$$\cos 2x - 3\sin(-x) - 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

13

а) Решите уравнение $2\sin^3 x + \sqrt{2}\cos 2x + \sin x = \sqrt{2}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

13

а) Решите уравнение $9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

13

а) Решите уравнение

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

13

а) Решите уравнение $2\log_4^2(4\sin x)-5\log_4(4\sin x)+2=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

По содержанию и методам решения задания разнообразные. Некоторые уравнения сводились к уравнениям типа

- $5\cos^2 x - 3\sin^2 x - \sin 2x = 2$
- $\sin x - \cos x = 1$
- $2\sin^2 x - 1 = 0$

На ДВИ часто предлагают решить уравнения типа

- $\cos\frac{13x}{6}\cdot\cos\frac{5x}{6}=1$
- $2\sin 2x=3(\sin x+\cos x)$

PS В первом уравнении нужно учесть ограниченность функции. Во втором применить замену: $\sin x+\cos x=t$ и свести уравнение к квадратному.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Панина Н.А.

n.a.panina@mail.ru