Интенсив «Уровень PRO»



# Решаем тригонометрические уравнения быстро и без ошибок

Панина Н. А.
учитель математики
МБОУ СШ № 33,
г. Смоленск

2026-2027 учебный год



# Основные типы тригонометрических уравнений

**1.** Простейшие тригонометрические уравнения – уравнения вида $\sin t = a$, $\cos t = a$, $\operatorname{tg} t = a$, $\operatorname{ctg} t = a$ и уравнения, сводящиеся к ним, например, $2\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + 1 = \sqrt{2}\cos x.$

**2.** Уравнения, решаемые методом разложения на множители, например, $2\sin^3 x = \sqrt{2}\cos^2 x + 2\sin x$, а также $2\sin^2 x - 1 = 0$.

**3.** Уравнения, сводящиеся к квадратным, например, $\cos 2x - 3\sin(x + \pi) - 2 = 0$.

**4.** Однородные тригонометрические уравнения, например, $5\cos^2 x - 3\sin^2 x - \sin 2x = 2$.

**5.** Уравнения, решаемые методом введения дополнительного угла, например, $\sin x - \sqrt{3}\cos x = -1$.

**6.** Тригонометрические уравнения с ограничениями, например, $\left(\operatorname{tg}^2 x - 1\right)\sqrt{13\cos x} = 0$.

**7.** Уравнения, решаемые с помощью специальных тригонометрических подстановок, например, $\sin 2x - 2\sin x - 2\cos x + 2 = 0$.

**8.** Уравнения вида $\sin 3x \cdot \cos 2x = -1$.

**9.** Метод мажорант (метод оценки) в уравнениях, например, $1 + \cos x = 2 + x^2$.

**10.**Преобразование произведения в сумму и суммы в произведение, например, $\sin 3x \cdot \sin x + \cos 9x \cdot \cos 5x = 0.$

**Вектор решения:** с помощью алгебраических и тригонометрических тождественных преобразований привести уравнение к совокупности простейших тригонометрических уравнений.

# Уравнения, сводящиеся к простейшим тригонометрическим уравнениям

Решите уравнение $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+1=\sqrt{2}\cos x.$

*Формула «синус суммы двух углов» есть в справочном материале – можно воспользоваться*

Решение. $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+1=\sqrt{2}\cos x;$

$$2\left(\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x+\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin x\right)+1=\sqrt{2}\cos x;$$

$$2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin x\right)+1=\sqrt{2}\cos x;$$

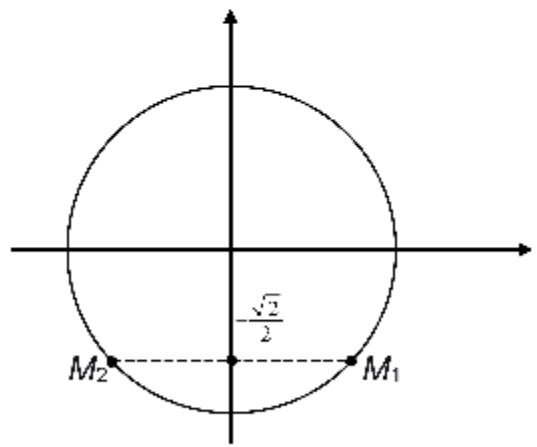
$$\sqrt{2}\cos x+\sqrt{2}\sin x+1-\sqrt{2}\cos x=0;$$

$$\sqrt{2}\sin x+1=0;$$

$$\sqrt{2}\sin x=-1;$$

$$\sin x=-\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$




*Во избежание ошибок* ***тригонометрическую окружность лучше изобразить и прочитать****, а не представлять её в воображении*

$$\left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}, \\ x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4}+2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}; \qquad -\frac{3\pi}{4}+2\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}.$

## Уравнения, решаемые методом разложения на множители

Решите уравнение $2\sin^3 x = \sqrt{2}\cos^2 x + 2\sin x$.

Решение. $2\sin^3 x = \sqrt{2}\cos^2 x + 2\sin x$;

$2\sin^3 x = \sqrt{2}\left(1-\sin^2 x\right) + 2\sin x;$

$2\sin^3 x = \sqrt{2} - \sqrt{2}\sin^2 x + 2\sin x;$

$2\sin^3 x - 2\sin x + \sqrt{2}\sin^2 x - \sqrt{2} = 0;$

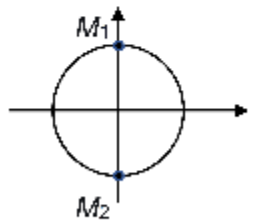
$\left(2\sin^3 x - 2\sin x\right) + \left(\sqrt{2}\sin^2 x - \sqrt{2}\right) = 0;$

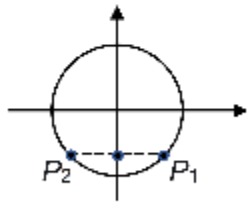
$2\sin x\left(\sin^2 x - 1\right) + \sqrt{2}\left(\sin^2 x - 1\right) = 0;$

$\left(\sin^2 x - 1\right)\left(2\sin x + \sqrt{2}\right) = 0;$

$\sin^2 x - 1 = 0 \quad$ или $\quad 2\sin x + \sqrt{2} = 0;$

$\sin x = \pm 1$ $\qquad$ $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$




$x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$

## Уравнения, решаемые методом разложения на множители

Решите уравнение $4\sin^2 x - 3 = 0$.

*Обратите внимание на возможность разложения левой части уравнения на множители:*

$$\left(2\sin x - \sqrt{3}\right)\left(2\sin x + \sqrt{3}\right) = 0.$$

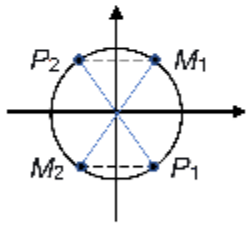
*Следовательно, уравнение распадается на два простейших тригонометрических уравнения:*

$$2\sin x - \sqrt{3} = 0 \quad \text{или} \quad 2\sin x + \sqrt{3} = 0;$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

*Можно решить каждое из полученных простейших уравнений и получить 4 серии решений. Но проще решать не каждое из уравнений в отдельности, а рассмотреть свойства решений двух уравнений одновременно, увидеть вертикальные углы на тригонометрической окружности и объединить 4 серии решений в две пары.*

Решение. $4\sin^2 x - 3 = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$




$M_1M_2$ – диаметр тригонометрической окружности

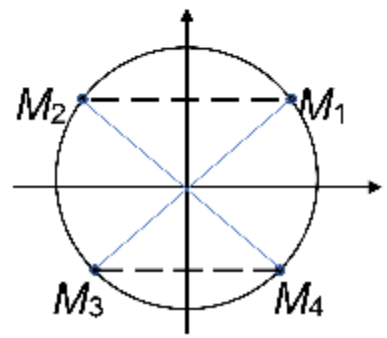
$P_1P_2$ – диаметр тригонометрической окружности

$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Решите уравнение $2\sin^2 x - 1 = 0$.

Решение. $2\sin^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$




Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

**Решение по смыслу упрощает дальнейший отбор корней на заданном промежутке!**

## Уравнения, сводящиеся к квадратным

Решите уравнение $\cos 2x - 3\sin(x+\pi) - 2 = 0$.

Решение. $\cos 2x - 3\sin(x+\pi) - 2 = 0$;

*Упростить второе слагаемое можно по формуле приведения, а можно – по формуле «синус суммы двух углов» из справочного материала.*

$\cos 2x + 3\sin x - 2 = 0;$

$\cos^2 x - \sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0;$

$1 - \sin^2 x - \sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0;$

$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0.$

Пусть $\sin x = t$, тогда уравнение примет вид

$2t^2 - 3t + 1 = 0$

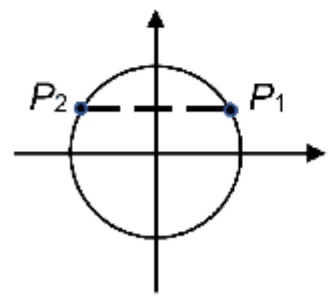
$D = 9 - 8 = 1; \qquad t_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{4}$

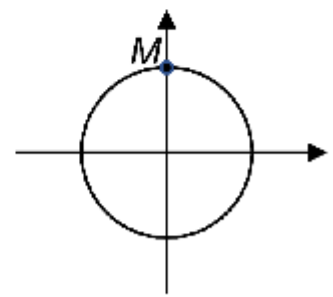
$t_1 = \frac{1}{2}; \quad t_2 = 1.$

Вернёмся к исходной переменной

$\sin x = \frac{1}{2}$ или $\sin x = 1$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases} \qquad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}$$




Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$



## Однородные тригонометрические уравнения

Решите уравнение $5\cos^2 x - 3\sin^2 x - \sin 2x = 2$.

*Особенность решения состоит в том, что прежде, чем выполнить деление,* ***нужно доказать****, что не выполняем деление на 0 (не провозгласить – это типичная ошибка, а* **доказать**!!! Можно «методом от противного».)

Решение. $5\cos^2 x - 3\sin^2 x - \sin 2x = 2;$

$5\cos^2 x - 3\sin^2 x - \sin 2x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x;$

$2\sin^2 x + 2\cos^2 x - 5\cos^2 x + 3\sin^2 x + \sin 2x = 0;$

$5\sin^2 x - 3\cos^2 x + \sin 2x = 0;$

$5\sin^2 x - 3\cos^2 x + 2\sin x\cos x = 0.$

Пусть $\cos x = 0$, тогда $\begin{cases}\cos x = 0,\\ 5\sin^2 x = 0;\end{cases}$ $\begin{cases}\cos x = 0,\\ \sin^2 x = 0;\end{cases}$ $\cos^2 x + \sin^2 x = 0 + 0 = 0,$

что противоречит тождеству $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, следовательно, в данном случае $\cos x \neq 0$.

Поэтому исходное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{5\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x};$$

$5\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3 = 0.$

Пусть $\operatorname{tg} x = t$, тогда $5t^2 + 2t - 3 = 0$, $D = 4 + 60 = 64 = 8^2$, $t_{1,2} = \frac{-2 \pm 8}{10}$, $\left[\begin{array}{l} t_1 = -1\\ t_2 = 0,6.\end{array}\right.$

Вернёмся к исходной переменной. $\operatorname{tg} x = -1$ или $\operatorname{tg} x = 0,6;$

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z};$ $x = \operatorname{arctg} 0,6 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$ Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z};$ $\operatorname{arctg} 0,6 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

## Уравнения, решаемые методом введения вспомогательного угла

Решите уравнение $\sin x-\sqrt{3}\cos x=-1$

*Помним теорию: при решении уравнений вида $A\sin x\pm B\cos x=C$ первый шаг – разделить обе части уравнения на $\sqrt{A^2+B^2}$, а затем увидеть в числовых множителях косинус и синус одного и того же угла.*

Решение. $\sin x-\sqrt{3}\cos x=-1\Big| \ :\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2;$

$$\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=-\frac{1}{2};$$

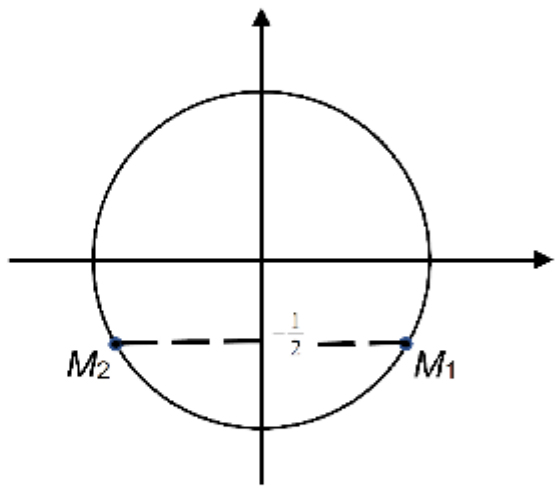
$$\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2};$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2};$$

$$\left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}+2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}, \\ x-\frac{\pi}{3}=-\frac{5\pi}{6}+2\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}, \\ x=\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}+2\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}, \\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$




Ответ: $\frac{\pi}{6}+2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}; \qquad -\frac{\pi}{2}+2\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}.$

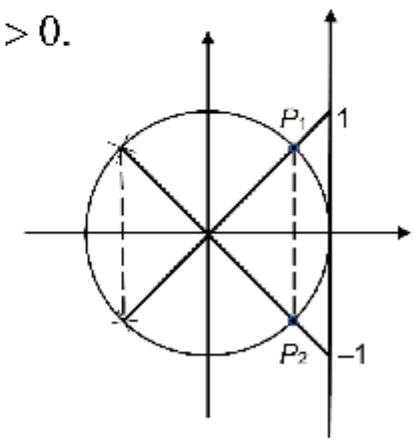
# Тригонометрические уравнения с ограничениями

Решите уравнение $\left(\operatorname{tg}^2 x-1\right)\sqrt{13\cos x}=0$

$$\left(\operatorname{tg}^2 x-1\right)\sqrt{13\cos x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x\neq 0,\\ 13\cos x\geq 0,\\ \left(\operatorname{tg}^2 x-1\right)\sqrt{13\cos x}=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos x>0,\\ \left(\operatorname{tg}^2 x-1\right)\sqrt{13\cos x}=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\operatorname{tg}^2 x-1=0,\\ \cos x>0\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{13\cos x}=0,\\ \cos x>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\operatorname{tg}^2 x-1=0,\\ \cos x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\operatorname{tg} x=\pm 1,\\ \cos x>0.\end{cases}$$




$$\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z},\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z};\qquad -\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.$

***План решения***

**1.** К заданному уравнению присоединяем ограничения, получаем систему, упрощаем её

**2.** Исходное уравнение распадается на два уравнения, следовательно, система из шага 1 распадается на две системы

**3.** Упрощаем совокупность систем (так как вторая система оказывается противоречивой, то она не имеет решений, получаем одну систему)

**4.** Систему решаем по тригонометрической окружности:

- изображаем на окружности множество решений уравнения (но формулы решений НЕ СОСТАВЛЯЕМ)
- из каждой точки отслеживаем выполнение ограничения
- точки, в которых ограничение не выполняется, удаляем
- точки, в которых ограничение выполняется, иллюстрируют решения исходного уравнения. Для них составляем формулы

**5.** Записываем ответ



## Уравнения, решаемые с помощью специальных тригонометрических подстановок

**1. *Универсальная тригонометрическая подстановка*:** $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=t$, *применяемая вместе с формулами* $\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ и $\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, *сводит тригонометрическое уравнение к алгебраическому рациональному уравнению. Особенность применения – выделение в решении двух частей «если* $\cos\frac{\alpha}{2}=0$» (в этом случае нельзя выполнить подстановку) и «если $\cos\frac{\alpha}{2}\neq 0$» (подстановка допустима).

Решите уравнение $\frac{3}{4}\operatorname{tg}x+\cos x+\frac{3}{4}\sin x+1=0$.

Решение. $\frac{3}{4}\operatorname{tg}x+\cos x+\frac{3}{4}\sin x+1=0$

1) Первый случай: $\cos\frac{x}{2}=0$, то есть $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$, то есть $\quad x=\pi+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$.

Тогда имеем $\frac{3}{4}\operatorname{tg}(\pi+2\pi k)+\cos(\pi+2\pi k)+\frac{3}{4}\sin(\pi+2\pi k)+1=0,$

$\frac{3}{4}\cdot 0+(-1)+\frac{3}{4}\cdot 0+1=0$ – верное равенство.

Следовательно, $\pi+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$, – решения исходного уравнения.

2) Второй случай: $\cos\frac{x}{2}\neq 0$.

Тогда $\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};\qquad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};\qquad \operatorname{tg}x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$.

Пусть $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, тогда уравнение примет вид $\frac{3}{4}\cdot\frac{2t}{1-t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{2t}{1+t^2}+1=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{3t}{2\left(1-t^2\right)}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{3t}{2\left(1+t^2\right)}+1=0 \Leftrightarrow \frac{3t}{2\left(1-t^2\right)}+\frac{1-t^2+1+t^2}{1+t^2}+\frac{3t}{2\left(1+t^2\right)}=0 \Leftrightarrow \frac{3t}{2\left(1-t^2\right)}+\frac{2}{1+t^2}+\frac{3t}{2\left(1+t^2\right)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3t\left(1+t^2\right)+2\cdot 2\left(1-t^2\right)+3t\left(1-t^2\right)}{2\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)}=0 \Leftrightarrow \frac{3t+3t^3+4-4t^2+3t-3t^3}{2\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)}=0 \Leftrightarrow \frac{-4t^2+6t+4}{2\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2\left(2t^2-3t-2\right)}{2\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)}=0 \Leftrightarrow \frac{2t^2-3t-2}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}2t^2-3t-2=0,\\ t\neq -1,\\ t\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow 2t^2-3t-2=0.$$

$D=9+16=25=5^2$

$t_{1,2}=\frac{3\pm 5}{4};\qquad t_1=-\frac{1}{2},\quad t_2=2$

Вернёмся к исходной переменной: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}$ или $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=2;$

$$\begin{bmatrix}\frac{x}{2}=-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi m, & m\in\mathbb{Z},\\ \frac{x}{2}=\operatorname{arctg}2+\pi n, & n\in\mathbb{Z}\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x=-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi m, & m\in\mathbb{Z},\\ x=2\operatorname{arctg}2+2\pi n, & n\in\mathbb{Z}.\end{bmatrix}$$

Ответ: $\pi+2\pi k, k\in\mathbb{Z};\quad 2\operatorname{arctg}2+2\pi n, n\in\mathbb{Z},\quad -2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi m, \quad m\in\mathbb{Z}.$



**2.** Решите уравнение $\sin 2x - 2\sin x - 2\cos x + 2 = 0$.

*Уравнения такого вида* (в уравнении содержится **не только алгебраическая сумма** $\sin x \pm \cos x$, **а и произведение** $\sin x \cdot \cos x$) *часто предлагают на ДВИ (дополнительное вступительное испытание). Особенность решения состоит в том, что* $1 \pm \sin 2x = \sin^2 x \pm 2\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = (\sin x \pm \cos x)^2$

*Следовательно, моделирование в условии выражения* $(1+\sin 2x)$ *или* $(1-\sin 2x)$ *и* ***подстановка*** $\sin x \pm \cos x = t$ *сведёт уравнение к алгебраическому рациональному уравнению, далее – по ситуации.*

Решение. $\sin 2x - 2\sin x - 2\cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow (1+\sin 2x) - 2(\sin x + \cos x) + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x\right) - 2(\sin x + \cos x) + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^2 - 2(\sin x + \cos x) + 1 = 0 \Leftrightarrow$

(в данном случае нет необходимости вводить подстановку, видим возможность применения ФСУ)

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

Ответ: $2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \qquad \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.



## Уравнения вида $\sin 3x \cdot \cos 2x = -1$

*Вообще говоря, можно привести бесконечно много примеров умножения двух чисел так, чтобы результатом действия оказалось число* (–1), например, $\frac{1}{20}\cdot(-20)=-1;\ \ -\frac{1}{5}\cdot 5=-1;\ \ \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=-1$ *и так далее, но эти примеры не соответствуют заданному уравнению по той причине, что в приведенных примерах модуль одного из множителей меньше* 1, *модуль другого множителя больше* 1, А ОБА МНОЖИТЕЛЯ ИСХОДНОГО УРАВНЕНИЯ НЕ БОЛЕЕ 1 И НЕ МЕНЕЕ (–1).

**Произведение двух множителей, каждый из которых принимает значения только из промежутка [–1; 1], равно (–1) тогда и только тогда, когда один из множителей равен 1, а другой равен (–1).**

Решение. $\sin 3x \cdot \cos 2x = -1 \ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin 3x = 1,\\ \cos 2x = -1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin 3x = -1,\\ \cos 2x = 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin 3x = 1,\\ 2x = \pi + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\end{cases}\\ \begin{cases}\sin 3x = -1,\\ 2x = 2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin 3x = 1,\\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n\in\mathbb{Z}\end{cases}\\ \begin{cases}\sin 3x = -1,\\ x = \pi m,\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 3\pi n\right) = 1,\\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n\in\mathbb{Z}\end{cases}\\ \begin{cases}\sin 3\pi m = -1,\\ x = \pi m,\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}n = 2k-1,\ n\in\mathbb{Z},\\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi(2k-1),\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.



# Метод мажорант (метод оценки) в уравнениях

Решите уравнение $1+\cos x = 2 + x^2$

*Обратим внимание на то, что выражения в левой и правой частях уравнения относятся* ***к разным темам алгебры****. В ТАКИХ СЛУЧАЯХ НУЖНО ПРИМЕНИТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ:*

| | |
|---|---|
| Шаг 1. Если можно, то упрощаем уравнение. | $1+\cos x = 2 + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = x^2 + 1$ |
| Шаг 2. Вводим функции с учётом левой и правой частей уравнения. Указываем общую область определения функций. | Пусть $f(x) = \cos x; \quad g(x) = x^2 + 1,$<br>$D(f) = D(g) = (-\infty; +\infty).$<br>Уравнение примет вид $f(x) = g(x).$ |
| Шаг 3. Можно попробовать провести исследование каждой функции на монотонность, а затем применить теорему «**Если одна из функций монотонно убывает в области определения, а другая функция в этой области возрастает, то если уравнение имеет корень, то он единственный**». После этого корень можно найти подбором. | - |
| Шаг 4. Если теорема из шага 3 неприменима к уравнению, то исследуем функции на множества значений и применяем свойства ограниченности функций. | Так как $-1 \le \cos x \le 1$, то $-1 \le f(x) \le 1$.<br>Так как $x^2 \ge 0$, то $x^2 + 1 \ge 1$, $g(x) \ge 1$.<br>$\left.\begin{array}{l} -1 \le f(x) \le 1 \\ g(x) \ge 1 \\ f(x) = g(x) \end{array}\right\| \Rightarrow$ исходное уравнение<br>равносильно системе уравнений<br>$\begin{cases} f(x) = 1, \\ g(x) = 1, \end{cases}$ то есть $\begin{cases} \cos x = 1, \\ x^2 + 1 = 1. \end{cases}$ |
| Шаг 5. Решаем полученную систему (в данном случае решаем второе уравнение, найденный корень подставляем в первое уравнение и получаем верное числовое равенство. Исходное уравнение решено). | $\begin{cases} \cos x = 1, \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 0 = 1, \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = 0$ |
| Шаг 6. Записываем ответ. | Ответ: 0 |

## Преобразование произведения в сумму и суммы в произведение

Решите уравнение $\sin 3x \cdot \sin x + \cos 9x \cdot \cos 5x = 0.$

Решение. $\sin 3x \cdot \sin x + \cos 9x \cdot \cos 5x = 0;$

$$\frac{1}{2}\left(\cos(3x - x) - \cos(3x + x)\right) + \frac{1}{2}\left(\cos(9x - 5x) + \cos(9x + 5x)\right) = 0;$$

$$\cos(3x - x) - \cos(3x + x) + \cos(9x - 5x) + \cos(9x + 5x) = 0;$$

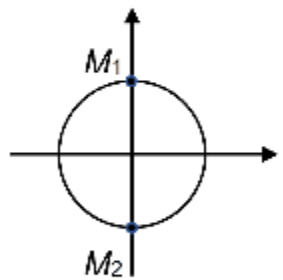
$$\cos 2x - \cos 4x + \cos 4x + \cos 14x = 0;$$

$$\cos 14x + \cos 2x = 0;$$

$$2\cos\frac{14x + 2x}{2} \cdot \cos\frac{14x - 2x}{2} = 0;$$

$$2\cos 8x \cdot \cos 6x = 0;$$

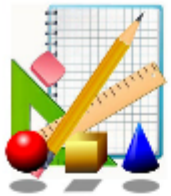
$\cos 8x = 0$ или $\cos 6x = 0;$




$$8x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \qquad 6x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{8}, \quad k \in \mathbb{Z}, \qquad x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

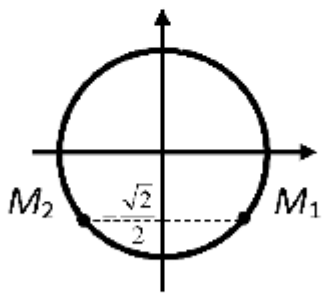
Ответ: $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{8},\ k \in \mathbb{Z};$ $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6},\ n \in \mathbb{Z}.$



**Отбор корней лучше выполнить одним из следующих способов:**
**- по тригонометрической окружности,**
**- с помощью двойных неравенств (методом оценки параметра),**
**- методом перебора.**

Рассмотрим эти методы на конкретном примере: исходное тригонометрическое уравнение распалось на два следующих уравнения:

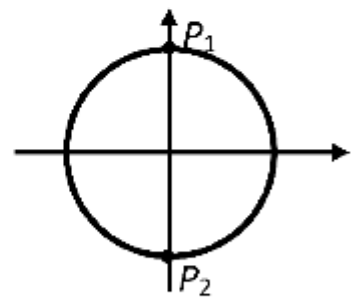
$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$




$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**или**

$$\sin x = \pm 1$$



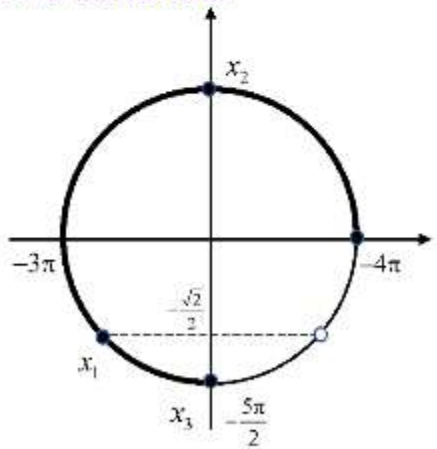

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi m, \ m \in \mathbb{Z}.$$

б) **Отбор по окружности**

*Решение признаётся обоснованным, если*

1) *концы заданного промежутка, на котором должны находиться корни, ИЗОБРАЖЕНЫ на окружности и ПОДПИСАНЫ,*
2) *дуга, на которой должны находиться корни, ВЫДЕЛЕНА,*
3) ** концы горизонтального диаметра можно подписать для более быстрого расчёта корней,*
4) *на окружность нанесены **ВСЕ** точки, иллюстрирующие множество решений исходного уравнения, и проведено графическое исследование принадлежности изображения выделенной дуге (УДАЛЕНЫ точки, не принадлежащие выделенной дуге, на окружности ВЫДЕЛЕНЫ точки и ПОДПИСАНЫ корни, принадлежащие промежутку),*
5) *рядом с чертежом показано, как выполнен РАСЧЁТ ИСКОМЫХ КОРНЕЙ,*
6) *указан ответ в задании.*

б) $\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$




$$x_1=-3\pi+\frac{\pi}{4}=-\frac{11\pi}{4}$$

$$x_2=-4\pi+\frac{\pi}{2}=-\frac{7\pi}{2}$$

$$x_3=-\frac{5\pi}{2}$$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\quad -\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\quad \frac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z}.$ б) $-\frac{7\pi}{2};\ -\frac{11\pi}{4};\ -\frac{5\pi}{2}.$



б) **Отбор корней с помощью неравенств (методом оценки параметра)**

*Отбор выполняется по формулам решений.*

*По каждой формуле*

*- нужно рассчитать значения параметра, при которых решение оказывается на заданном промежутке,*

*- а затем при каждом найденном значении параметра нужно вычислить корень исходного уравнения. Это искомый корень (он принадлежит промежутку).*

*Математически это самый строгий метод отбора.*

*Практически в нём два недостатка:*

*1) он затратный по времени (в выполняемом задании потребовал в 2-3 раза больше времени, чем отбор по тригонометрической окружности, так как отбор выполнялся по трём формулам. У экспериментальной группы время отбора по окружности составило от 2 до 3 минут, время отбора по неравенствам составило от 6 до 8 минут),*

*2) если в расчётах допущена вычислительная ошибка, то даже при наличии правильного ответа за отбор корней участник экзамена получает 0 баллов.*

***Совет: затраты времени существенно уменьшаются, если работу выполнять не с дробями, а с целыми числами.***

б) $\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$

$x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},$

$-4\pi\le-\frac{\pi}{4}+2\pi k\le-\frac{5\pi}{2},$

$-16\pi\le-\pi+8\pi k\le-10\pi,$

$-15\pi\le8\pi k\le-9\pi,$

$-\frac{15\pi}{8\pi}\le k\le-\frac{9\pi}{8\pi},$

$-1\frac{7}{8}\le k\le-1\frac{1}{8},$

Так как $k\in\mathbb{Z}$, то

решений нет.

$x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z},$

$-4\pi\le-\frac{3\pi}{4}+2\pi n\le-\frac{5\pi}{2},$

$-16\pi\le-3\pi+8\pi n\le-10\pi,$

$-13\pi\le8\pi n\le-7\pi,$

$-\frac{13\pi}{8\pi}\le n\le-\frac{7\pi}{8\pi},$

$-1\frac{5}{8}\le n\le-\frac{7}{8},$

Так как $n\in\mathbb{Z}$, то $n=-1$.

Тогда $x=-\frac{3\pi}{4}-2\pi=-\frac{11\pi}{4}.$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z},$

$-4\pi\le\frac{\pi}{2}+\pi m\le-\frac{5\pi}{2},$

$-8\pi\le\pi+2\pi m\le-5\pi,$

$-9\pi\le2\pi m\le-6\pi,$

$-\frac{9\pi}{2\pi}\le m\le-\frac{6\pi}{2\pi},$

$-4\frac{1}{2}\le m\le-3,$

Так как $m\in\mathbb{Z}$, то $m=-4;-3$.

Тогда $x=\frac{\pi}{2}-4\pi=-\frac{7\pi}{2},$

$x=\frac{\pi}{2}-3\pi=-\frac{5\pi}{2}.$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\quad -\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\quad \frac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z}.$ б) $-\frac{7\pi}{2};\ -\frac{11\pi}{4};\ -\frac{5\pi}{2}.$



## Отбор корней перебором

*Решение признаётся обоснованным только тогда, когда оно позволяет назвать все корни, принадлежащие заданному промежутку, и доказать, что других корней на промежутке нет.*

*Отбор осуществляется по формулам. Каждую формулу рассматриваем как функцию: $x$ – функция, k (или n, m) – аргумент. Функция является дискретной, линейной,* ***возрастающей.***

*Работая этим методом, мысленно представляем числовую прямую $x$ и заданный промежуток на ней. Затем по каждой формуле*

*1) нужно указать такое значение k (или n, m) и соответствующее ему значение $x$, чтобы корень располагался левее заданного промежутка (**«недолёт»**).*

*Так как уменьшение значений k (или n, m) уменьшит корень, то он будет ещё левее промежутка, а, следовательно, не является искомым.*

*2) нужно увеличить значение k (или n, m) на 1 и рассчитать соответствующее ему значение $x$. Если оно располагается на заданном промежутке, то это один из искомых корней (**«попадание в промежуток»**).*

*Шаг нужно повторять до тех пор, пока корень не окажется правее промежутка,*

3) *корень, который оказался правее промежутка, уже не является искомым (**«перелёт»**). Дальнейшее увеличение k (или n, m) на 1 бессмысленно (получающиеся корни и подавно будут правее промежутка (по свойству транзитивности).*

б) $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$

1) $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

Если $k = -2$, то $x = -\frac{\pi}{4} - 4\pi < -4\pi$,

если $k = -1$, то $x = -\frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{9\pi}{4} > -\frac{5\pi}{2}$.

Следовательно, нет таких корней, которые можно рассчитать по указанной формуле, и они принадлежали бы указанному промежутку.

2) $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Если $n = -2$, то $x = -\frac{3\pi}{4} - 4\pi < -4\pi$,

если $n = -1$, то $x = -\frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{11\pi}{4}$; $-\frac{11\pi}{4} \in \left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$,

если $n = 0$, то $x = -\frac{3\pi}{4} > -\frac{5\pi}{2}$.

3) $x=\frac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$

Если $m=-5$, то $x=\frac{\pi}{2}-5\pi<-4\pi$,

если $m=-4$, то $x=\frac{\pi}{2}-4\pi=-\frac{7\pi}{2};\quad -\frac{7\pi}{2}\in\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$,

если $m=-3$, то $x=\frac{\pi}{2}-3\pi=-\frac{5\pi}{2};\quad -\frac{5\pi}{2}\in\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$,

если $m=-2$, то $x=\frac{\pi}{2}-2\pi>-\frac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\quad -\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\quad \frac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$.

б) $-\frac{7\pi}{2};\ -\frac{11\pi}{4};\ -\frac{5\pi}{2}$.

*Особенность:* ***даже тогда, когда корень совпал с правым концом промежутка, нужно выполнить «перелёт».***



## СОВЕТ

*Если участник ЕГЭ знает, что в процессе подготовки к экзамену он неоднократно применял формулы приведения неправильно, то ему нужно осознать, что в этот момент он должен иначе организовать свои действия: нужно не применять мнемоническое правило, а выстроить полную цепочку рассуждений, используя справочный материал ЕГЭ.*

*На первой странице КИМ (контрольно-измерительного материала) указаны 4 формулы:*

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

*Мысленно эти формулы можно дополнить самому:*

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

*Преобразование выражения выполнить (можно на черновике, можно в чистовике) более подробно:* $\cos(\pi-2x) = \cos\pi\cdot\cos 2x + \sin\pi\cdot\sin 2x = -1\cdot\cos 2x + 0\cdot\sin 2x = -\cos 2x$.

ЖЕЛАЮ УСПЕХА!



**Благодарю**
**за внимание!**

**Желаю успеха!**

Панина Н.А.