Интенсив

2024-2025 учебный год

Решение заданий с параметром

Панина Нина Александровна,

учитель МБОУ «СШ № 33», г. Смоленска

18.1 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = |x-a| - 4, \\ 4|y| + x^2 + 8x = 0 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Источник условия: КИМ ЕГЭ-2024, профильная математика, открытый вариант

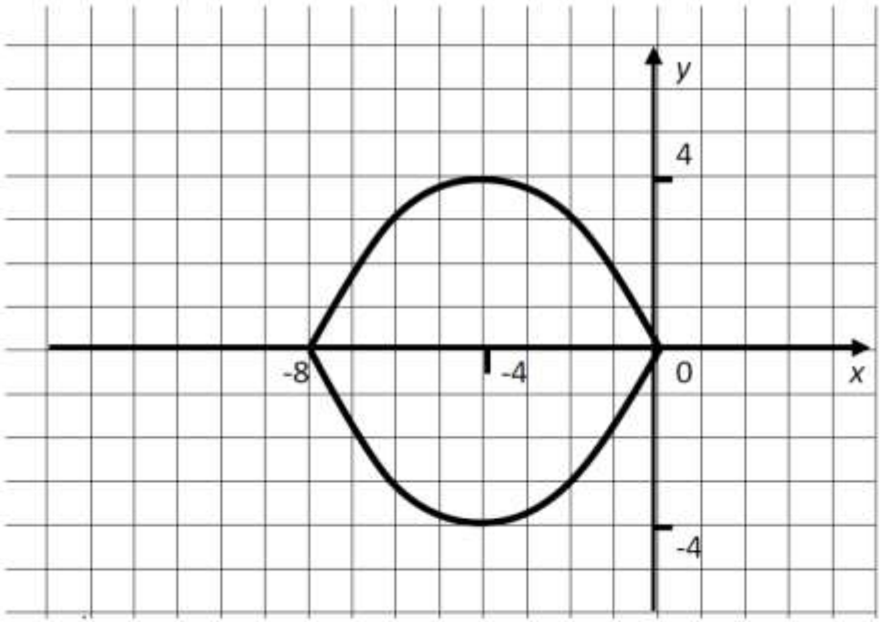
Решение. Первый способ

$$\begin{cases} y = |x-a| - 4, \\ 4|y| + x^2 + 8x = 0 \end{cases}$$

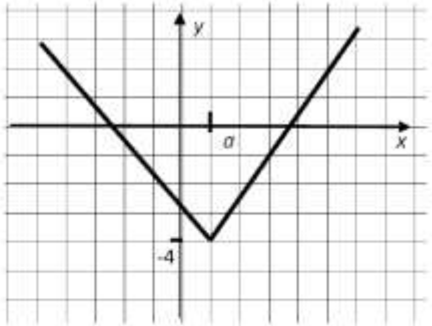
1) $4|y| + x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow 4|y| = -x^2 - 8x \Leftrightarrow |y| = -\dfrac{x^2}{4} - 2x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y < 0, \\ -y = -\dfrac{x^2}{4} - 2x \end{cases} \\ \begin{cases} y \ge 0, \\ y = -\dfrac{x^2}{4} - 2x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4} + 2x, \\ y < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -\dfrac{x^2}{4} - 2x, \\ y \ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$y = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + 2x, \text{ если } y < 0, \\ -\dfrac{x^2}{4} - 2x, \text{ если } y \ge 0. \end{cases}$$

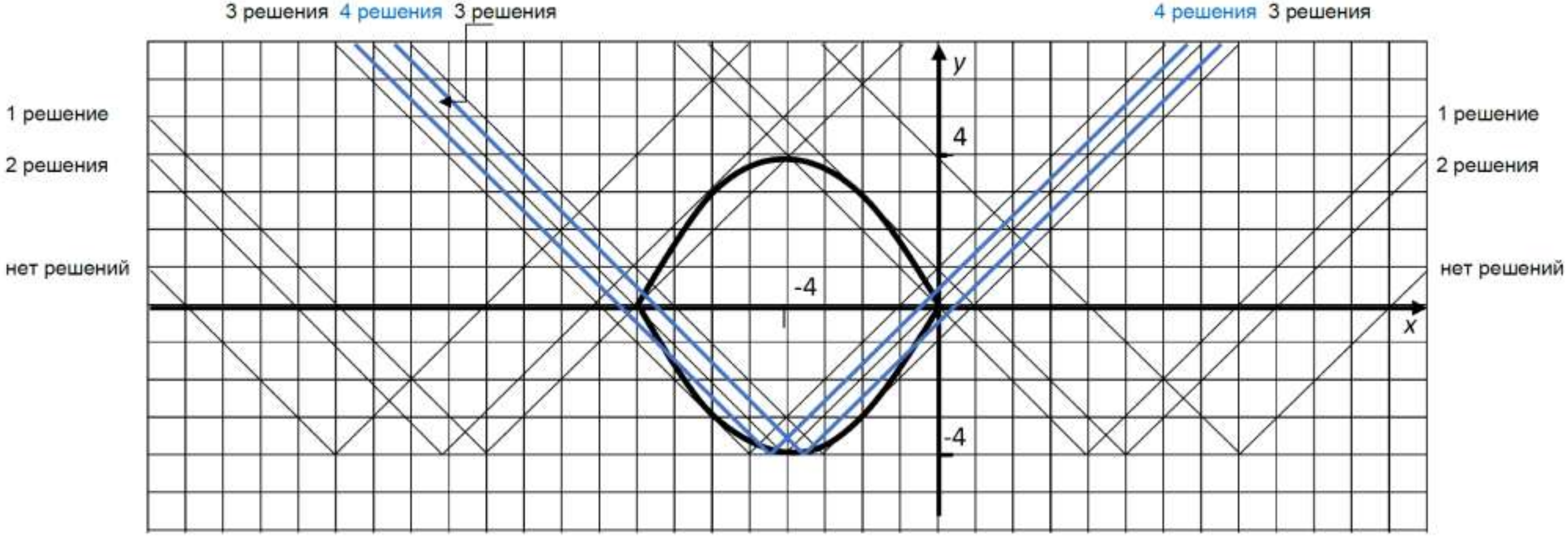


2) График функции $y=|x-a|-4$ может быть получен из графика функции $y=|x-a|$ смещением на 4 единичных отрезка вниз. Таким образом, при изменении значения параметра a точка излома графика функции $y=|x-a|-4$ будет смещаться по прямой y = –4.



$$y=\begin{cases}-x+a-4, \text{ если } x<a,\\ x-a-4, \text{если } x\geq a.\end{cases}$$

3) Проведём исследование взаимного расположения графиков уравнений системы, установим количество общих точек графиков. Каждой общей точке соответствует одно решение исходной системы уравнений.



Правый луч касается параболы, расположенной выше, если $\left(-\frac{x^2}{4}-2x\right)'=1$, то есть в точке x_0 = –6. Тогда $-\frac{(-6)^2}{4}-2\cdot(-6)=-6-a-4 \;\Leftrightarrow\; a=-10+9-12 \;\Leftrightarrow\; a=-13$. Исходная система имеет ровно одно решение, так как левый луч не имеет общих точек с параболами.

При a < –13 исходная система не имеет решений.

Левый луч касается параболы, расположенной ниже, если $\left(\frac{x^2}{4}+2x\right)'=-1$, то есть в точке x_0 = –6. Тогда $\frac{(-6)^2}{4}+2\cdot(-6)=-(-6)+a-4 \;\Leftrightarrow\; a=9-12-2 \;\Leftrightarrow\; a=-5$. Исходная система имеет ровно три различных решения, так как правый луч при этом пересекает каждую из двух парабол.

При –13 < a < –5 исходная система имеет ровно два различных решения (левый луч не имеет общих точек с параболами, а правый пересекает каждую из двух парабол).

Точка излома графика функции $y=|x-a|-4$ совпадает с вершиной параболы, расположенной ниже, если $\begin{cases} x=-4, \\ y=-4, \\ y=|x-a|-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4, \\ x=-4, \\ y=-4. \end{cases}$ Исходная система имеет ровно три различных решения (общими точками графиков уравнений являются вершина параболы, расположенной ниже, и обе точки склеивания парабол).

При –5 < a < –4 исходная система имеет ровно четыре различных решения (каждый из двух лучей пересекает каждую из двух парабол).

Правый луч касается параболы, расположенной ниже, если $\left(\frac{x^2}{4}+2x\right)'=1$, то есть в точке x_1 = –2. Тогда $\frac{(-2)^2}{4}+2\cdot(-2)=-2-a-4 \quad\Leftrightarrow\quad a=-6-1+4 \quad\Leftrightarrow\quad a=-3$. Исходная система имеет ровно три различных решения, так как левый луч при этом пересекает каждую из двух парабол.

При –4 < a < –3 исходная система имеет ровно четыре различных решения (каждый из двух лучей пересекает каждую из двух парабол).

Левый луч касается параболы, расположенной выше, если $\left(-\frac{x^2}{4}-2x\right)'=-1$, то есть в точке x_1 = –2. Тогда $-\frac{(-2)^2}{4}-2\cdot(-2)=-(-2)+a-4 \quad\Leftrightarrow\quad a=-1+4+2 \quad\Leftrightarrow\quad a=5$. Исходная система имеет ровно одно решение, так как правый луч не имеет общих точек с параболами.

При –3 < a < 5 исходная система имеет ровно два различных решения (правый луч не имеет общих точек с параболами, а левый пересекает каждую из двух парабол).

При a > 5 исходная система не имеет решений.

Следовательно, исходная система имеет ровно 4 различных решения тогда и только тогда, когда –5 < a < –4, –4 < a < –3.

Ответ: –5 < a < –4, –4 < a < –3.

Второй способ.

$$\begin{cases} y=|x-a|-4, \\ 4|y|+x^2+8x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=|x-a|-4, \\ 4\big||x-a|-4\big|+x^2+8x=0 \end{cases}$$

$$1)\quad 4\big||x-a|-4\big|+x^2+8x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-a<0, \\ 4|-x+a-4|+x^2+8x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-a\ge 0, \\ 4|x-a-4|+x^2+8x=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-a<0, \\ 4|-x+a-4|+x^2+8x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-a\ge 0, \\ 4|x-a-4|+x^2+8x=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-a<0, \\ -x+a-4<0, \\ 4(x-a+4)+x^2+8x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-a<0, \\ -x+a-4\ge 0, \\ 4(-x+a-4)+x^2+8x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-a\ge 0, \\ x-a-4<0, \\ 4(-x+a+4)+x^2+8x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-a\ge 0, \\ x-a-4\ge 0, \\ 4(x-a-4)+x^2+8x=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>x, \\ a<x+4, \\ 4x-4a+16+x^2+8x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a>x, \\ a\ge x+4, \\ -4x+4a-16+x^2+8x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a\le x, \\ a>x-4, \\ -4x+4a+16+x^2+8x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a\le x, \\ a\le x-4, \\ 4x-4a-16+x^2+8x=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<a<x+4, \\ x^2+12x-4a+16=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a\ge x+4, \\ x^2+4x+4a-16=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-4<a\le x, \\ x^2+4x+4a+16=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a\le x-4, \\ x^2+12x-4a-16=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < a < x+4, \\ x^2 + 12x - 4a + 16 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a \geq x+4, \\ x^2 + 4x + 4a - 16 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-4 < a \leq x, \\ x^2 + 4x + 4a + 16 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a \leq x-4, \\ x^2 + 12x - 4a - 16 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < a < x+4, \\ 4a = x^2 + 12x + 16 \end{cases} \\ \begin{cases} a \geq x+4, \\ 4a = -x^2 - 4x + 16 \end{cases} \\ \begin{cases} x-4 < a \leq x, \\ 4a = -x^2 - 4x - 16 \end{cases} \\ \begin{cases} a \leq x-4, \\ 4a = x^2 + 12x - 16 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < a < x+4, \\ a = \frac{1}{4}x^2 + 3x + 4 \end{cases} \\ \begin{cases} a \geq x+4, \\ a = -\frac{1}{4}x^2 - x + 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x-4 < a \leq x, \\ a = -\frac{1}{4}x^2 - x - 4 \end{cases} \\ \begin{cases} a \leq x-4, \\ a = \frac{1}{4}x^2 + 3x - 4 \end{cases} \end{array}\right.$$

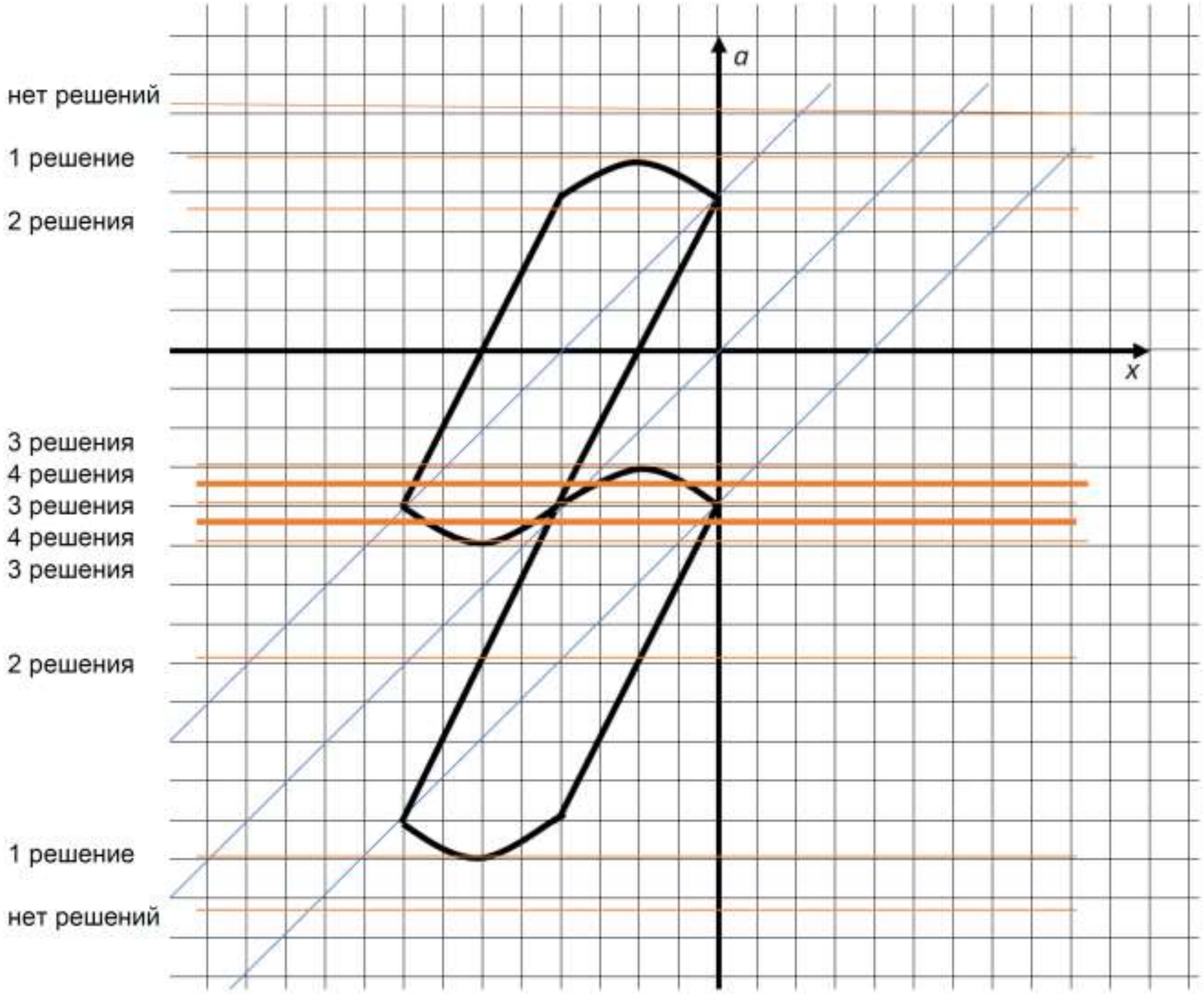
Следовательно, графиком уравнения $4\big||x-a|-4\big|+x^2+8x=0$ является совокупность четырёх парабол с ограничениями.

Вершина первой параболы располагается в точке (–6; –5), второй – в точке (–2; 5), третьей – в точке (–2; –3), четвёртой – в точке (–6; –13).

Точки склеивания частей парабол (0; –4), (0; 4), (–8; –4), (–8; –12).

Точка касания парабол (–4; –4).

Рассмотрим функцию $y = |x - a| - 4$. Каждому значению x соответствует ровно одно значение y. Следовательно, сколько раз прямая, параллельная оси абсцисс пересекает график функции $a(x)$, столько решений имеет исходная система при фиксированном значении a.



Итак, если $a < -13$, то графики не имеют общих точек, следовательно, исходная система не имеет решений,

если $a = -13$, то — ровно 1 решение,

если $-13 < a < -5$, то — ровно 2 решения,

если $a = -5$, то — ровно 3 решения,

если $-5 < a < -4$, то — ровно 4 решения,

если $a = -4$, то — ровно 3 решения,

если $-4 < a < -3$, то — ровно 4 решения,

если $a = -3$, то — ровно 3 решения,

если $-3 < a < 5$, то — ровно 2 решения,

если $a = 5$, то — ровно 1 решение,

если $a > 5$, то — нет решений.

Следовательно, исходная система имеет ровно 4 различных решения тогда и только тогда, когда $a \in (-5; -4) \cup (-4; -3)$.

Ответ: при $a \in (-5; -4) \cup (-4; -3)$.

18.2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left(1-(x+2a+1)^2\right)^3-\left(1-(x+2a+1)^2\right)^2=3^{3|x-2a|}-3^{2|x-2a|}$$

имеет хотя бы один корень.

Источник условия: ЕГЭ-2024, профильная математика. Сайт https://alexlarin.net/ege/2024/18_2024.html

Решение

$$\left(1-(x+2a+1)^2\right)^3-\left(1-(x+2a+1)^2\right)^2=3^{3|x-2a|}-3^{2|x-2a|}\Leftrightarrow\left(1-(x+2a+1)^2\right)^3-\left(1-(x+2a+1)^2\right)^2=\left(3^{|x-2a|}\right)^3-\left(3^{|x-2a|}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(1-(x+2a+1)^2\right)^2\left(1-(x+2a+1)^2-1\right)=\left(3^{|x-2a|}\right)^2\left(3^{|x-2a|}-1\right)\Leftrightarrow-\left(1-(x+2a+1)^2\right)^2(x+2a+1)^2=\left(3^{|x-2a|}\right)^2\left(3^{|x-2a|}-1\right)\Leftrightarrow$$

1) $-\left(1-(x+2a+1)^2\right)^2(x+2a+1)^2\le 0$ при любых действительных x и a.

2) $|x-2a|\ge 0$ при любых действительных x и a.

Поэтому $3^{|x-2a|}\ge 3^0$, то есть $3^{|x-2a|}\ge 1$;

$$3^{|x-2a|}-1\ge 0;$$

$\left(3^{|x-2a|}\right)^2\left(3^{|x-2a|}-1\right)\ge 0$ при любых действительных x и a.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\left(1-(x+2a+1)^2\right)^2(x+2a+1)^2=0,\\ \left(3^{|x-2a|}\right)^2\left(3^{|x-2a|}-1\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3^{|x-2a|}-1=0,\\ \left(1-(x+2a+1)^2\right)^2(x+2a+1)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3^{|x-2a|}=1,\\ \left(1-(x+2a+1)^2\right)^2(x+2a+1)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{|x-2a|}=1, \\ \left(1-(x+2a+1)^2\right)^2(x+2a+1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2a|=0, \\ \left(1-(x+2a+1)^2\right)^2(x+2a+1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2a=0, \\ \left(1-(x+2a+1)^2\right)^2(x+2a+1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2a, \\ \left(1-(2a+2a+1)^2\right)^2(2a+2a+1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2a, \\ \left(1-(4a+1)^2\right)(4a+1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2a, \\ \left[\begin{array}{l} (4a+1)^2=1, \\ (4a+1)^2=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2a, \\ \left[\begin{array}{l} 4a+1=-1, \\ 4a+1=1, \\ 4a+1=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2a, \\ \left[\begin{array}{l} a=-0,5, \\ a=0, \\ a=-0,25. \end{array}\right. \end{cases}$$

При значениях параметра –0,5, –0,25, 0 исходное уравнение имеет хотя бы один корень.

Ответ: $a=-0,5,\ a=-0,25,\ a=0.$

Задание выполнено методом мажорант (методом оценки). Структурное совпадение левой и правой частей уравнения являются случайным, для применения метода это НЕ ЯВЛЯЕТСЯ НЕОБХОДИМЫМ УСЛОВИЕМ.

АЛГОРИТМ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ МЕТОДОМ МАЖОРАНТ

Шаг 1. Левой части уравнения (возможно, полученного после преобразований исходного уравнения) ставим в соответствие функцию $f(x)$, правой части – функцию $g(x)$.

Шаг 2. Доказываем, что $f(x)\le m$ при допустимых значениях x, $g(x)\ge m$ при допустимых значениях x.

Шаг 3. Переходим к системе, учитывая, что

$$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\le m, \\ g(x)\ge m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=m, \\ g(x)=m. \end{cases}$$

Шаг 4. Решаем полученную систему уравнений (более простой способ: решить одно из уравнений и проверить, являются ли корни решённого уравнения корнями другого уравнения).

18.3 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(yx-8)(y-x-2)\geq 0,\\ y-ax-4a-4=0,\\ x<0\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Источник условия задачи: https://alexlarin.net/ege/2025/trvar487.html

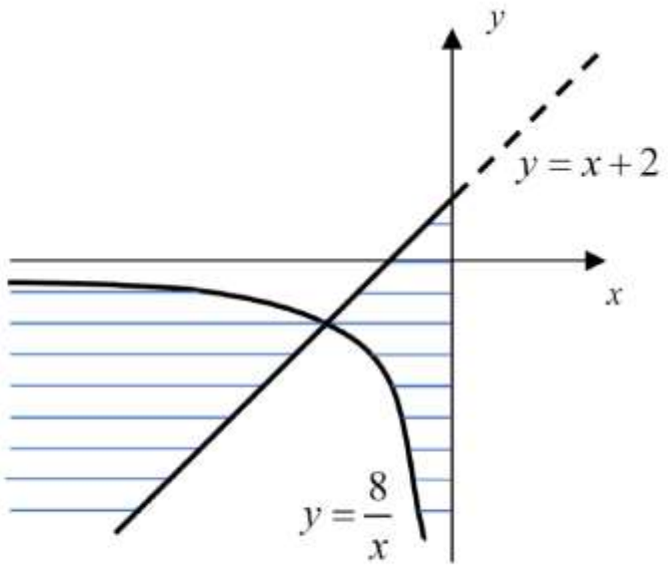
Решение

$$\begin{cases}(yx-8)(y-x-2)\geq 0,\\ y-ax-4a-4=0,\\ x<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(yx-8)(y-x-2)\geq 0,\\ x<0,\\ y=a(x+4)+4.\end{cases}$$

Система имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда прямая $y=a(x+4)+4$ имеет хотя бы одну общую точку с множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases}(yx-8)(y-x-2)\geq 0,\\ x<0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}(yx-8)(y-x-2)\ge 0,\\ x<0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}yx-8\le 0,\\ y-x-2\le 0,\\ x<0\end{cases}\\ \begin{cases}yx-8\ge 0,\\ y-x-2\ge 0,\\ x<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}yx\le 8,\\ y\le x+2,\\ x<0\end{cases}\\ \begin{cases}yx\ge 8,\\ y\ge x+2,\\ x<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y\ge \dfrac{8}{x},\\ y\le x+2,\\ x<0\end{cases}\\ \begin{cases}y\le \dfrac{8}{x},\\ y\ge x+2,\\ x<0\end{cases}\end{array}\right.$$



Уравнение $y = a(x+4)+4$ определяет прямые (можно: пучок прямых), проходящие через точку (–4; 4).

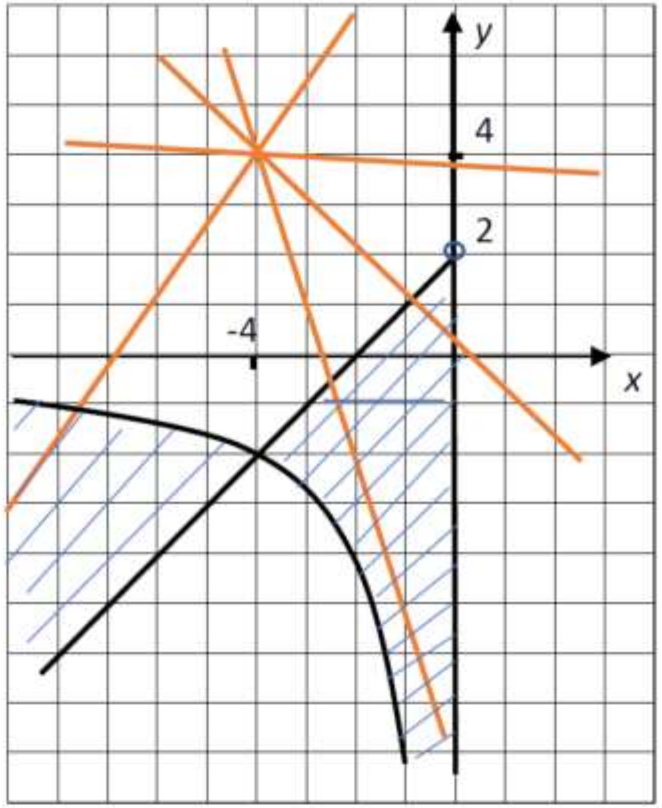
Если прямая образует тупой угол с положительным направлением оси *Ox* и пересекает ось *Oy* в точке, расположенной не ниже точки (0; 2), то исходная система не имеет решений.

Если прямая образует тупой угол с положительным направлением оси *Ox* и пересекает ось *Oy* в точке, расположенной ниже точки (0; 2), то исходная система имеет хотя бы одно решение (можно: более одного решения). Тогда

$$y(0) < 2;$$

$$a(0+4)+4 < 2 \iff 4a < -2 \iff a < -\frac{1}{2}.$$

Если прямая образует острый угол с положительным направлением оси *Ox*, то исходная система имеет хотя бы одно решение (можно: более одного решения). Тогда $a > 0$.



Следовательно, исходная система имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда $a \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right) \cup (0;\ +\infty)$.

Ответ: $a \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right) \cup (0;\ +\infty)$.

Типы заданий с параметром (постановка задачи):

- Решить уравнение (неравенство, систему) при всех допустимых значениях параметра

- Выяснить, при каких значениях параметра все решения уравнения (неравенства) удовлетворяют заданным ограничениям (например, 1) больше (меньше) некоторого числового значения или 2) содержатся в промежутке конечной длины)

- Найти все значения параметра, при каждом из которых уравнение (неравенство, система) имеет определённое количество решений

- Найти все значения параметра, при каждом из которых функция обладает указанным свойством (например, 1) её наименьшее значение больше (не меньше) некоторого числа, или 2) наибольшее значение меньше (не больше) некоторого числа, или 3) имеет заданное количество точек экстремума).

Независимо от метода решения, поставленной задачи, исследование должно быть полным, соответствующим всем допустимым значениям параметра.

Из результатов полного исследования делается выборка в соответствии с выполняемым заданием. Она сопровождается словами «… (то, что требуется в задании) … выполняется тогда и только тогда, когда … (указываются все искомые значения параметра)…».

Приёмы решения уравнений, неравенств, систем:

- уравнения и неравенства чаще всего допускают разложение на множители с выходом на утверждение: «**Произведение равно 0 тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен 0, а остальные множители при этом не теряют смысла**», то есть сводятся к решению простейших уравнений (неравенств) с ограничениями

- уравнения и неравенства допускают возможность преобразования к некоторому каноническому виду (например, к уравнению окружности с центром в точке $(x_0; y_0)$ и радиусом R)

- содержат знак модуля (модулей), а следовательно, распадаются на части при снятии знака. Следует иметь ввиду, что знак модуля может присутствовать в неявном виде (например, в задании содержится выражение $\sqrt{x^2-6x+9}$, которое, по сути, равно $|x-3|$)

Методы выполнения заданий с параметром

Графический (сводится к графической работе в координатной плоскости). Метод эффективен, если выполняются три условия:

- ✓ можно создать уравнение, не содержащее параметр,
- ✓ может быть построен график этого уравнения,
- ✓ график уравнения с параметром несложно построить при любом конкретно указанном значении параметра.

Изображаются в координатной плоскости график первого уравнения и совокупность графиков второго уравнения. Затем выполняется анализ взаимного расположения графиков при изменении допустимых значений параметра в соответствии с условием задачи.

Аналитический (от «аналитика» – расчёт, применение численных методов для выявления важных закономерностей).

- ✓ В процессе аналитических преобразований рассматривается полная система гипотез,
- ✓ выполняется аналитический расчёт при каждой гипотезе,
- ✓ полученные ответы исследуются методом наложения и объединяются в совокупность.

Интегрированный (чаще всего, аналитические преобразования прекращаются на некотором шаге и результат графически интерпретируется в координатной плоскости, решение продолжается графическим методом).

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

ЖЕЛАЮ УСПЕХОВ!

Панина Н.А.
n.a.panina@mail.ru