Особенности выполнения заданий 14 и 17

Панина Нина Александровна,
учитель математики МБОУ
«Средняя школа № 33, г. Смоленск»

Критерии оценивания заданий 14 и 17

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Из сказанного выше следует, что **ВСЕ причины умозаключений нужно указывать** (иначе – неполные обоснования).

Неточности в доказательствах – это НЕДООБЪЯСНЕНИЕ причин, но не ошибочность самого суждения или неточность умозаключения.

Задания считаются выполненными верно, если экзаменуемый выбрал **правильный путь решения**, ***<u>из письменной записи решения понятен ход его рассуждений</u>***, **обоснованно получен верный ответ**. В этом случае ему выставляется полный балл, соответствующий данному заданию.

Особенности оформления решений

В контрольно-измерительном материале, который получает участник ЕГЭ, переход к части 2 сопровождается инструкцией: «Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.»

1. Инструкция не требует краткую запись условия и задания в геометрических задачах. Записи «Дано: …», «Доказать: …» «Найти: …» не являются обязательными. Но, если эти записи участник ЕГЭ решит сделать, а представит информацию не в полном объёме или с искажением условия, то ошибка будет зафиксирована экспертами и может повлиять на конечный результат оценивания.

2. Термин «ответ» следует рассматривать в широком смысле: всё решение задания участником экзамена является его письменным ответом. «Ответы записывайте чётко и разборчиво» означает «все записи, относящиеся к решению, должны быть читаемыми (чёткими, разборчивыми).

3. В процессе подготовки к экзамену следует обратить особое внимание на написание латинской буквы D. Если в решении присутствуют обе точки D и O, то в некоторых работах их трудно отличить (оценивание в пользу экзаменуемого отсутствует).

   Совет: для записи прописной буквы D использовать не печатный, а рукописный латинский символ. Он совпадает с прописной рукописной буквой Д в русском алфавите.

4. По мере продвижения в решении задачи, получения новой информации о геометрическом объекте полезно наносить её на чертёж. Наглядные представления подскажут ход решения, ускорят темп выполнения задания, если участник ЕГЭ владеет теоретическими знаниями по геометрии, условиями их применения.

В ЦЕЛЯХ ПРЕДУПРЕЖДЕНИЯ ОШИБОК, СВЯЗАННЫХ С НЕПРАВИЛЬНЫМ ПРОЧТЕНИЕМ ЗАДАЧИ, ИСКАЖЕНИЕМ ЕЁ УСЛОВИЯ

можно рекомендовать многократное осмысленное прочтение условия задачи:

шаг 1. Прочтение целого текста с целью выявления главной особенности заданной фигуры (например, прямая треугольная призма, правильная четырёхугольная пирамида, равнобедренный треугольник, прямоугольная трапеция и т. п.),

шаг 2. Изображение заданной фигуры на чертеже и повторное последовательное фрагментарное прочтение условия задачи с параллельной работой на чертеже по каждому фрагменту,

шаг 3. Прочтение целого текста с параллельным контролем и уточнением деталей на чертеже.

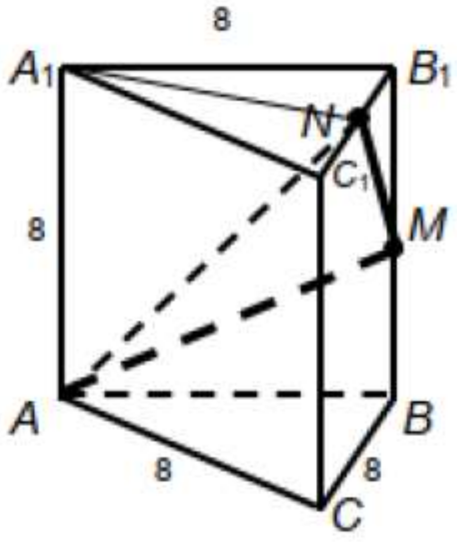
Только после того, как установлено полное соответствие чертежа и осознанного восприятия информации условию задачи, следует приступать к её решению.

14. Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 8. Точки M и N – середины рёбер BB_1 и B_1C_1 соответственно.

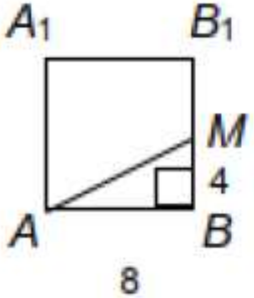
а) Докажите, что прямые AM и MN перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями AMN и BAA_1

Источник: https://alexlarin.net/ege/2024/prb223.html

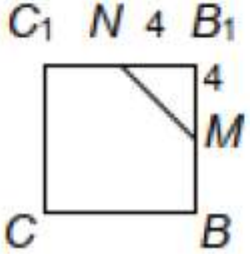


Решение. а) Первый способ (с применением теоремы, обратной теореме Пифагора)

1) 

$$AM^2 = AB^2 + BM^2$$

$$AM^2 = 8^2 + 4^2 = 64 + 16 = 80$$

2) 

$$MN^2 = NB_1^2 + MB_1^2$$

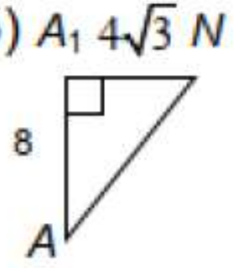
$$MN^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32$$

3) Дополнительное построение: (AA_1N).

В этой плоскости расположен треугольник AA_1N.

4)

$$\left.\begin{array}{l} AA_1 \perp (A_1B_1C_1), \text{ так как призма } ABCA_1B_1C_1 \text{ является прямой} \\ A_1N \subset (A_1B_1C_1) \end{array}\right| \Rightarrow AA_1 \perp A_1N$$

5) 

A_1N – медиана и высота равностороннего треугольника $A_1B_1C_1$.

$$A_1N = A_1B_1 \sin 60° = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

$$AN^2 = AA_1^2 + A_1N^2$$

$$AN^2 = 8^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2 = 64 + 48 = 112$$

6) Учитывая результаты действий 5), 1) и 2), получаем

$$\left.\begin{array}{l} AN^2 = 112, \\ AM^2 = 80, \\ MN^2 = 32, \\ 112 = 80 + 32 \end{array}\right| \Rightarrow \quad AN^2 = AM^2 + MN^2$$

По теореме, обратной теореме Пифагора, заключаем, что треугольник *AMN* прямоугольный, градусная мера угла *AMN* равна 90°. Следовательно, прямые *AM* и *MN* перпендикулярны. Утверждение доказано.

б) Первый способ (линейный угол двугранного угла)

1) Плоскости AMN и BAA_1 пересекаются по прямой AM.

Рассмотрим один из двугранных углов, образовавшихся при пересечении этих плоскостей. Это двугранный угол A_1AMN.

$NM \perp AM$ (доказано в задаче а),

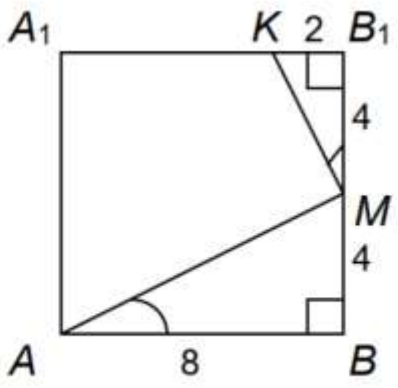
NM лежит в полуплоскости AMN.

Дополнительное построение: в полуплоскости AA_1B_1 из точки M проведём луч MK, перпендикулярный к AM.

K – точка пересечения MK и A_1B_1.

$$\left.\begin{array}{l} NM \perp AM, \quad NM \subset (AMN), \\ MK \perp AM, \quad MK \subset (AA_1B_1), \\ A_1AMN - \text{двугранный угол} \end{array}\right| \Rightarrow \angle KMN - \text{линейный}$$

угол двугранного угла A_1AMN.

2) 

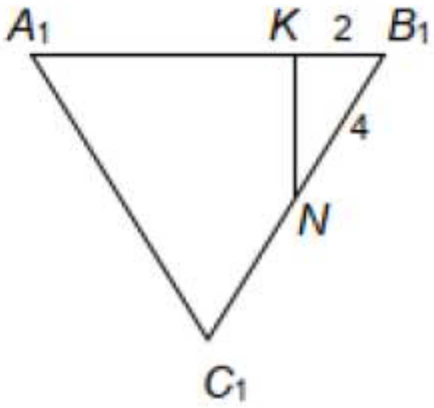
Треугольники ABM и MB_1K подобны (по двум углам). Тогда

$$\frac{AB}{MB_1} = \frac{BM}{B_1K};$$

$$\frac{8}{4} = \frac{4}{B_1K};$$

$$B_1K = 2$$

Следовательно, $KM^2 = KB_1^2 + B_1M^2;\quad KM^2 = 2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$

3) 

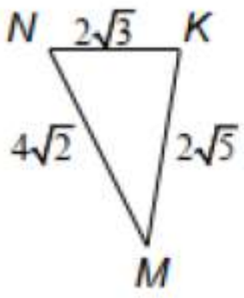
В плоскости $A_1B_1C_1$ соединим точки K и N. Учтём, что треугольник $A_1B_1C_1$ равносторонний. По теореме косинусов

$$KN^2 = B_1K^2 + B_1N^2 - 2B_1K \cdot B_1N \cdot \cos A_1B_1C_1$$

$$KN^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos 60° = 4 + 16 - 16 \cdot \frac{1}{2} = 12$$

4) Установлено, что $MN^2 = 32;\quad KM^2 = 20;\quad KN^2 = 12.$

Тогда $MN = \sqrt{32} = 4\sqrt{2};\quad KM = \sqrt{20} = 2\sqrt{5};\quad KN = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$



$$KN^2 = KM^2 + MN^2 - 2 \cdot KM \cdot MN \cdot \cos KMN;$$

$$12 = 20 + 32 - 2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \cos KMN;$$

$$16\sqrt{10} \cdot \cos KMN = 40;$$

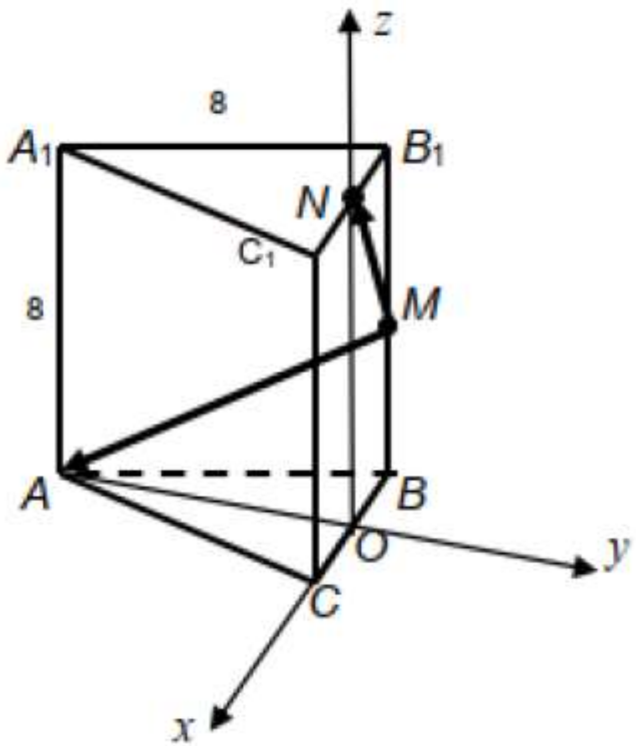
$$\cos KMN = \frac{40}{16\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{20} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

$$\angle KMN = \arccos\frac{\sqrt{10}}{4}.$$

Линейный угол острый, следовательно, угол между плоскостями *AMN* и BAA_1 равен $\arccos\frac{\sqrt{10}}{4}$.

Ответ: б) $\arccos\frac{\sqrt{10}}{4}$.

а) Второй способ (координатно-векторный метод)



Введём систему координат следующим образом:

начало координат O – середина отрезка BC,

ось Ox направим вдоль прямой BC,

ось Oy – вдоль прямой AO,

ось Oz – вдоль прямой ON.

Это прямоугольная система координат.

Учтём, что каждое ребро призмы равно 8 (по условию), а AO – высота равностороннего треугольника ABC.

Следовательно, $AO = AC \cdot \sin 60° = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$. Тогда

$A\left(0; -4\sqrt{3}; 0\right)$, $B(-4; 0; 0)$, $C(4; 0; 0)$,

$B_1(-4; 0; 8)$, $M(-4; 0; 4)$, $N(0; 0; 8)$,

$\overrightarrow{MA}\left\{4; -4\sqrt{3}; -4\right\}$, $\overrightarrow{MN}\{4; 0; 4\}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MN} = 4\cdot 4 + \left(-4\sqrt{3}\right)\cdot 0 + (-4)\cdot 4 = 16 - 16 = 0, \\ \left|\overrightarrow{MA}\right| \neq 0, \\ \left|\overrightarrow{MN}\right| \neq 0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{Угол между}$$

векторами $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MN}$ равен 90. Следовательно, носители векторов, то есть прямые MA и MN перпендикулярны. Утверждение доказано.

б) Второй способ (координатно-векторный метод)

Угол между плоскостями равен углу между перпендикулярами к этим плоскостям

1) Составим уравнение плоскости *AMN*, зная, что плоскость проходит через точки $A\left(0;-4\sqrt{3};0\right)$, $M\left(-4;0;4\right)$, $N\left(0;0;8\right)$.

Уравнение плоскости имеет вид $ax+by+cz+d=0$.

Имеем:

$$\begin{cases} a\cdot 0+b\cdot\left(-4\sqrt{3}\right)+c\cdot 0+d=0, \\ a\cdot\left(-4\right)+b\cdot 0+c\cdot 4+d=0, \\ a\cdot 0+b\cdot 0+c\cdot 8+d=0; \end{cases} \quad \begin{cases} -4b\sqrt{3}+d=0, \\ -4a+4c+d=0, \\ 8c+d=0; \end{cases} \quad \begin{cases} b=\dfrac{d\sqrt{3}}{12}, \\ 4a=-\dfrac{d}{2}+d, \\ c=-\dfrac{d}{8}; \end{cases} \quad \begin{cases} a=\dfrac{d}{8}, \\ b=\dfrac{d\sqrt{3}}{12}, \\ c=-\dfrac{d}{8}. \end{cases}$$

Уравнение плоскости *AMN*: $\frac{d}{8}x+\frac{d\sqrt{3}}{12}y-\frac{d}{8}z+d=0.$

По смыслу задачи $d\neq 0$. Тогда $3x+2\sqrt{3}y-3z+24=0$ – уравнение плоскости *AMN*.

Вектор $\overrightarrow{n_1}\left\{3;\,2\sqrt{3};\,-3\right\}$ перпендикулярен плоскости *AMN*.

2) Составим уравнение плоскости BAA_1, зная, что плоскость проходит через точки $B(-4; 0; 0)$, $A\left(0; -4\sqrt{3}; 0\right)$, $A_1\left(0; -4\sqrt{3}; 8\right)$.

Уравнение плоскости имеет вид $ax + by + cz + d = 0$.

Имеем:

$$\begin{cases} a\cdot(-4) + b\cdot 0 + c\cdot 0 + d = 0, \\ a\cdot 0 + b\cdot\left(-4\sqrt{3}\right) + c\cdot 0 + d = 0, \\ a\cdot 0 + b\cdot\left(-4\sqrt{3}\right) + c\cdot 8 + d = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -4a + d = 0, \\ -4\sqrt{3}b + d = 0, \\ -4\sqrt{3}b + 8c + d = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a = \dfrac{d}{4}, \\ b = \dfrac{d\sqrt{3}}{12}, \\ 8c = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a = \dfrac{d}{4}, \\ b = \dfrac{d\sqrt{3}}{12}, \\ c = 0. \end{cases}$$

Уравнение плоскости BAA_1: $\dfrac{d}{4}x + \dfrac{d\sqrt{3}}{12}y + 0z + d = 0.$

По смыслу задачи $d \neq 0$. Тогда $3x + \sqrt{3}y + 0z + 12 = 0$ — уравнение плоскости BAA_1.

Вектор $\overrightarrow{n_2}\left\{3; \sqrt{3}; 0\right\}$ перпендикулярен плоскости BAA_1.

3) Найдём угол между векторами $\vec{n_1}\left\{3;\, 2\sqrt{3};\, -3\right\}$ и $\vec{n_2}\left\{3;\, \sqrt{3};\, 0\right\}$.

$$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=3\cdot 3+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+(-3)\cdot 0=9+6=15,$$

$$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=\left|\vec{n_1}\right|\cdot\left|\vec{n_2}\right|\cdot\cos\left(\vec{n_1},\vec{n_2}\right)$$

$$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=\sqrt{9+12+9}\cdot\sqrt{9+3+0}\cdot\cos\left(\vec{n_1},\vec{n_2}\right)=\sqrt{30}\cdot\sqrt{12}\cdot\cos\left(\vec{n_1},\vec{n_2}\right).$$

$$\sqrt{6\cdot 5}\cdot\sqrt{6\cdot 2}\cdot\cos\left(\vec{n_1},\vec{n_2}\right)=15;$$

$$\cos\left(\vec{n_1},\vec{n_2}\right)=\frac{15}{6\sqrt{10}}=\frac{5\sqrt{10}}{20}=\frac{\sqrt{10}}{4}.$$

$\cos\left(\vec{n_1},\vec{n_2}\right)>0$, следовательно, угол между векторами острый. Тогда он равен углу между плоскостями.

Итак, угол между плоскостями *AMN* и BAA_1 равен $\arccos\frac{\sqrt{10}}{4}$.

Ответ: б) $\arccos\frac{\sqrt{10}}{4}$.

17. Дан угол величиной 120° с вершиной C. Вне угла на продолжении его биссектрисы взята точка O так, что $OC=\sqrt{3}$. С центром в точке O построена окружность радиуса 3, пересекающая стороны угла в точках A и B.

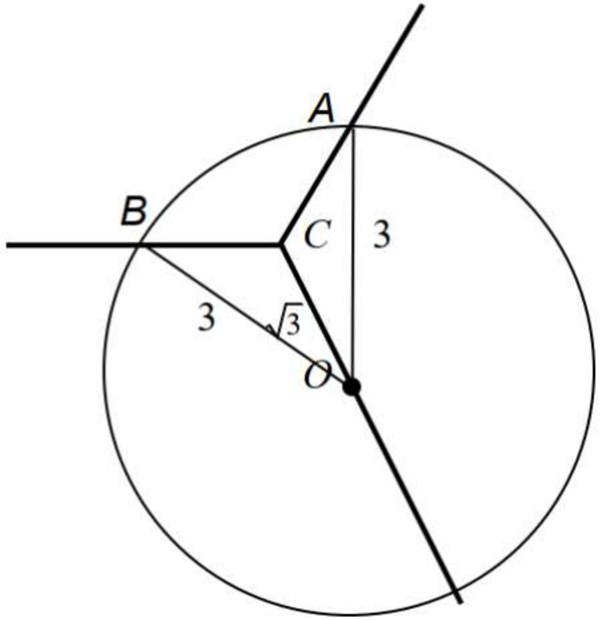
а) Докажите, что $OC = BC = CA$.

б) Найдите площадь фигуры, ограниченной сторонами угла и дугой окружности, заключённой между ними.

Источник: https://alexlarin.net/ege/2024/trvar451.html

Решение.

а)



$$\left.\begin{array}{l}\angle ACB = 120^\circ \text{ (по условию)}\\ CO - \text{ биссектриса угла}\end{array}\right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow \angle ACO = \angle BCO = 120^\circ.$

1) Рассмотрим $\triangle OCA.$

$OA = 3, \quad OC = \sqrt{3}, \quad \angle ACO = 120^\circ.$

По теореме синусов

$$\frac{OA}{\sin ACO} = \frac{OC}{\sin CAO};$$

$$\frac{3}{\sin 120^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\sin CAO}; \quad \sin CAO = \frac{\sqrt{3} \cdot \sin 120^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{1}{2}.$$

Так как угол CAO является острым, то $\angle CAO = 30^\circ.$

Тогда $\angle COA = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ,$

треугольник CAO является равнобедренным с основанием $AO.$

Следовательно, $CA = OC.$

2) Рассмотрим $\triangle OCB$.

$BO = 3, \quad OC = \sqrt{3}, \quad \angle BCO = 120°.$

По теореме синусов

$$\frac{OB}{\sin BCO} = \frac{OC}{\sin CBO}; \quad \frac{3}{\sin 120^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\sin CBO};$$

$$\sin CBO = \frac{\sqrt{3} \cdot \sin 120^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{1}{2}.$$

Так как угол CBO является острым, то $\angle CBO = 30°$.

Тогда $\angle COB = 180° - 120° - 30° = 30°$,

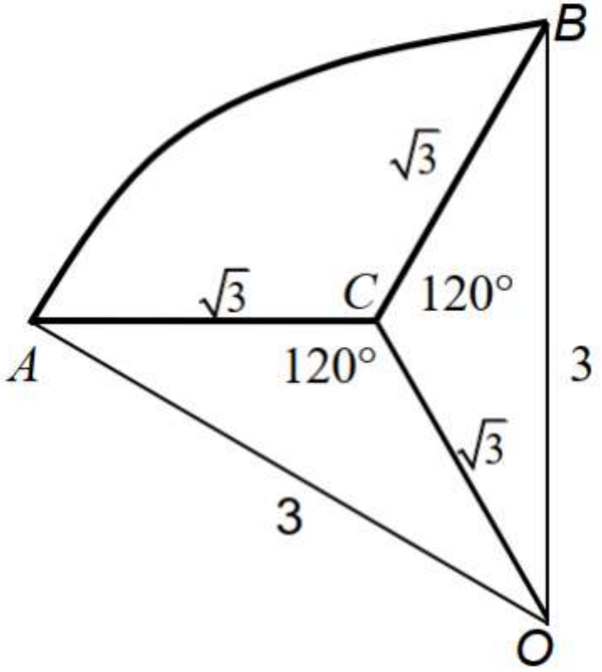
треугольник CBO является равнобедренным с основанием BO.

Следовательно, $BC = OC$.

3) $\left.\begin{array}{l} CA = OC, \\ BC = OC \end{array}\right| \Rightarrow OC = BC = CA$

Утверждение а) доказано.

б) Найдём площадь фигуры, ограниченной сторонами угла и дугой окружности, заключённой между ними.



$$S_{\text{фигуры}} = S_{\text{сектора } AOB} - S_{\triangle ACO} - S_{\triangle BCO}$$

1) Рассмотрим треугольники ACO и BCO. Они равны по двум сторонам и углу между ними: $AC = BC$, сторона OC общая; $\angle ACO = \angle BCO = 120°$.
2) Так как треугольники равны, то и площади их равны. Тогда
$$S_{\text{фигуры}} = S_{\text{сектора } AOB} - 2S_{\triangle ACO}.$$

3) $S_{\triangle ACO} = \frac{1}{2} AC \cdot OC \cdot \sin ACO = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sin 120° = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

4) $\angle AOC = \angle BOC = 30°$ (доказано в п. а). Следовательно, центральный угол сектора равен 60°. Тогда

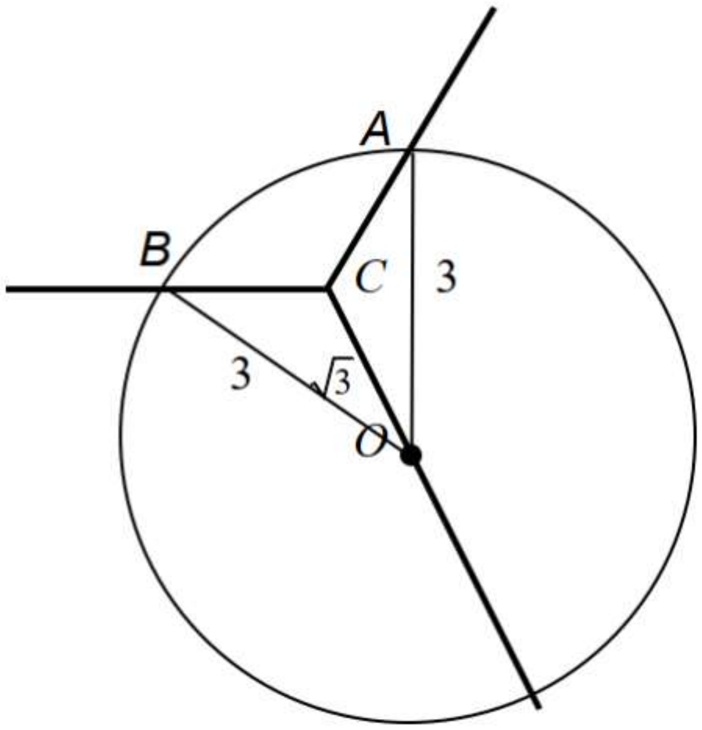
$$S_{\text{сектора } AOB} = \frac{1}{6} S_{\text{круга}} = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 3^2 = \frac{3\pi}{2}$$

5) $S_{\text{фигуры}} = S_{\text{сектора } AOB} - 2S_{\triangle ACO} = \frac{3\pi}{2} - 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{3\pi - 3\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $S_{\text{фигуры}} = \frac{3\pi - 3\sqrt{3}}{2}$.

PS Преобладало словесное объяснение причин. Можно было в большей степени использовать символику.

а)



$\angle ACB = 120°$ (по условию)
$CO-$ биссектриса угла $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ACO = \angle BCO = 120°.$

1) $\dfrac{OA}{\sin ACO} = \dfrac{OC}{\sin CAO}$; $\dfrac{3}{\sin 120^\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sin CAO}$;

$$\sin CAO = \frac{\sqrt{3}\cdot\sin 120^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{1}{2}.$$

$\angle CAO = 30°$, т. к. $\angle CAO$ острый.

Тогда $\angle COA = 180° - 120° - 30° = 30°.$

$\angle CAO = 30°$
$\angle COA = 30°$ $\Rightarrow \triangle CAO$ равнобедренный с основанием AO.

Следовательно, $CA = OC$.

2) $\dfrac{OB}{\sin BCO}=\dfrac{OC}{\sin CBO}$; $\quad \dfrac{3}{\sin 120^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin CBO}$;

$$\sin CBO=\frac{\sqrt{3}\cdot\sin 120^\circ}{3}=\frac{\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{3}=\frac{1}{2}.$$

$\angle CBO=30°$, т. к. $\angle CBO$ острый.

Тогда $\angle COB=180°-120°-30°=30°$.

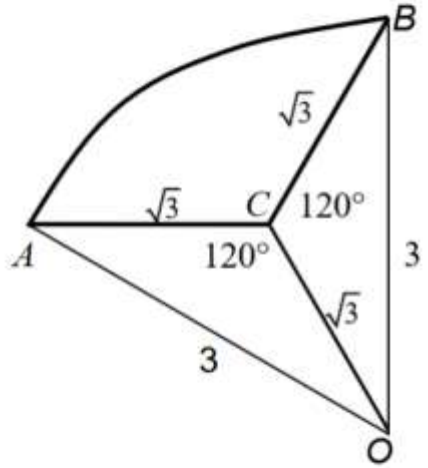
$\left.\begin{array}{l}\angle CBO=30°\\ \angle COB=30°\end{array}\right| \Rightarrow \triangle CBO$ равнобедренный с основанием BO.

Следовательно, $BC=OC$.

3) $\left.\begin{array}{l}CA=OC,\\ BC=OC\end{array}\right| \Rightarrow OC=BC=CA$

Утверждение а) доказано.

б)



$$S_{\text{фигуры}} = S_{\text{сектора } AOB} - S_{\triangle ACO} - S_{\triangle BCO}$$

$$\left.\begin{array}{l} AC = BC = \sqrt{3}, \\ CO - \text{ общая сторона}, \\ \angle ACO = \angle BCO \ (CO - \text{ биссектриса}) \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle ACO = \triangle BCO,$$

$$S_{\triangle ACO} = S_{\triangle BCO} = \frac{1}{2} CA \cdot CO \cdot \sin ACO =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sin 120^\circ = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

$\angle AOC = \angle BOC = 30^\circ$ (доказано в п. а)

$\angle AOB = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ.$

$$S_{\text{сектора } AOB} = \frac{S_{\text{круга}}}{6} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}.$$

$$S_{\text{фигуры}} = S_{\text{сектора } AOB} - 2S_{\triangle ACO} = \frac{3\pi}{2} - 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{3\pi - 3\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: б) $\dfrac{3\pi - 3\sqrt{3}}{2}$.

Особенности оформления решения

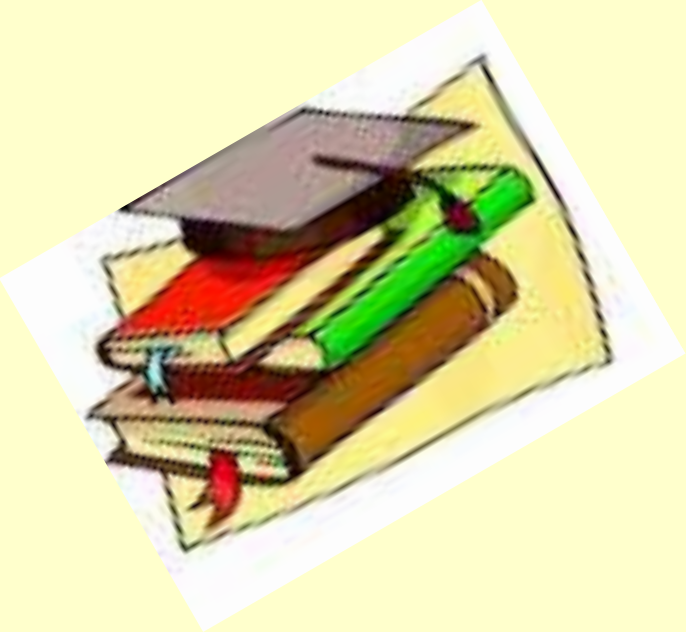
- В рамках времени ЕГЭ объяснить все причины невозможно, но это и не требуется. Однако, если из совокупности причин вытекает НЕ ЕДИНСТВЕННОЕ заключение, то обоснование является **обязательным** (Пример: известно, что синус угла в треугольнике равен $\frac{1}{2}$. Чему равен угол треугольника? Почему, например, 30^{O}, а не 150^{O}?)

- Обязательно фиксируются причины при применении теоремы о трёх перпендикулярах и ей обратной, признаков параллельности, перпендикулярности математических объектов, указании точки пересечения прямой и плоскости (двух прямых в трёхмерном пространстве)

- Не обязательно описывать причины словесно или представлять их формулировками теорем. В ряде случаев их достаточно графически проиллюстрировать на чертеже (равенство, подобие треугольников, возможность применения теоремы Пифагора и т. д.)

- Если выполнен выносной чертёж и на него нанесены числовые данные, то можно не записывать формулу буквенной символикой, а сразу приступить к расчёту значения.

Благодарю за внимание!



Панина Н. А.
+79051620770