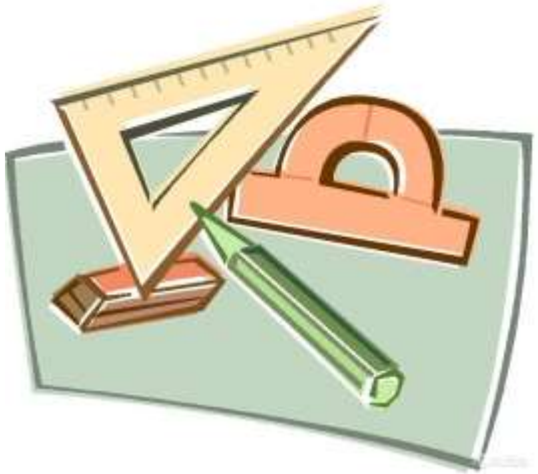


Интенсив

2024-2025 учебный год

Решение неравенств

Панина Нина Александровна,

учитель МБОУ «СШ № 33», г. Смоленска

Задание 15 на ЕГЭ по профильной математике всегда содержит изюминку. Тот, кто выполняет задание формально, не задумываясь о смысле неравенства и тождественности выполняемых преобразований, не сможет получить максимальный балл, независимо от типа неравенства.

Следовательно, ***решая неравенство, нужно***

видеть смысл компонентов действий и самого неравенства и

следить за тождественностью выполняемых преобразований.

В 2024 году в регионе

- задание выполнили неправильно или не пытались выполнить (получили 0 баллов) 1105 участников экзамена,
- получили 1 балл 87 участников,
- 367 участников экзамена по профильной математике (лишь 23,5% сдающих экзамен) получили максимальную оценку 2 первичных балла.

Рассмотрим задание из открытого варианта 301 ЕГЭ-2024. В процессе решения этого и других заданий методические пояснения выделены фиолетовым цветом, теоретические обоснования применяемых методов – синим цветом, само решение с необходимыми пояснениями – чёрным цветом.

15. Решите неравенство $\dfrac{3^x+9}{3^x-9}+\dfrac{3^x-9}{3^x+9}\ge\dfrac{4\cdot 3^{x+1}+144}{9^x-81}$.

Решение можно оформлять, используя знак равносильности, но можно и без него. На оценку это не влияет.

$$\frac{3^x+9}{3^x-9}+\frac{3^x-9}{3^x+9}\geq\frac{4\cdot 3^{x+1}+144}{9^x-81}\Leftrightarrow\frac{3^x+9}{3^x-9}+\frac{3^x-9}{3^x+9}\geq\frac{4\cdot 3^x\cdot 3+144}{\left(3^x\right)^2-81}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{3^x+9}{3^x-9}+\frac{3^x-9}{3^x+9}\geq\frac{12\cdot 3^x+144}{\left(3^x\right)^2-81}.$$

Пусть $3^x=t$, тогда неравенство примет вид

$$\frac{t+9}{t-9}+\frac{t-9}{t+9}\geq\frac{12t+144}{t^2-81}.$$

Обратите внимание: метод не предполагает установления области допустимых значений новой переменной. Введение новой переменной следующим образом: «Пусть $3^x=t,\ t>0$», не считается ошибкой, но и не считается абсолютно правильным (допускается).

Метод введения новой переменной в уравнениях и неравенствах:

Шаг 1. Какую-то *часть уравнения заменяем новой переменной* (прежняя переменная не должна содержаться наряду с новой, исключения крайне редки и направлены на установление взаимосвязи выражений внутри уравнения или неравенства).

Шаг 2. *Решаем полученное* уравнение или неравенство.

Шаг 3. Используя результаты шага 2, *возвращаемся к исходной переменной*, получаем новые уравнения или неравенства.

Шаг 4. *Решаем уравнения или неравенства, полученные* в шаге 3.

$$\frac{t+9}{t-9}+\frac{t-9}{t+9}\geq\frac{12t+144}{t^2-81}\Leftrightarrow\frac{t+9}{t-9}+\frac{t-9}{t+9}-\frac{12t+144}{(t-9)(t+9)}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(t+9)^2+(t-9)^2-(12t+144)}{(t-9)(t+9)}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{t^2+18t+81+t^2-18t+81-12t-144}{(t-9)(t+9)}\geq 0\Leftrightarrow\frac{2t^2-12t+18}{(t-9)(t+9)}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2(t^2-6t+9)}{(t-9)(t+9)}\geq 0\Leftrightarrow\frac{2(t-3)^2}{(t-9)(t+9)}\geq 0.$$

Далее большинство участников допускало ошибку. Они, видимо, рассуждали так: заметим, что числитель принимает неотрицательные значения при любом значении переменной, дробь должна принимать неотрицательные значения, следовательно, знаменатель должен быть больше 0. После этих рассуждений получали неравенство $(t-9)(t+9)>0$ и решали его. Получали неправильный ответ: $t<-9$ или $t>9$.

Если бы числитель принимал **только положительные значения**, рассуждение, изложенное выше, было бы правильным. Но в выполняемом задании знак неравенства нестрогий, числитель может и равняться 0. А ***когда числитель равняется 0,*** **и дробь принимает неотрицательные значения,** ***то знаменатель может быть и отрицательным*** (участники потеряли именно это решение).

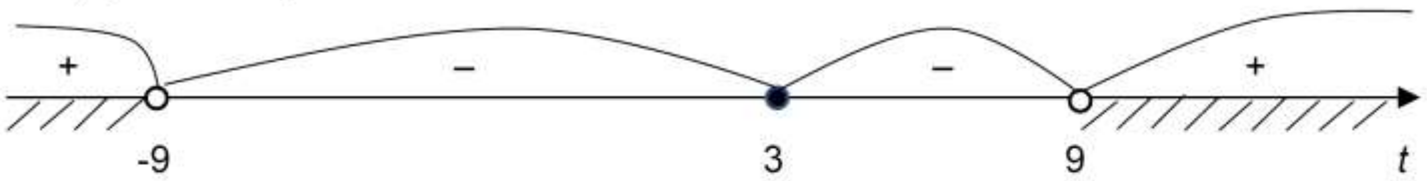
Рассмотрим два способа решения полученного неравенства.

1-й способ (метод интервалов). $\dfrac{2(t-3)^2}{(t-9)(t+9)} \geq 0.$

Рассмотрим функцию $f(t)=\dfrac{2(t-3)^2}{(t-9)(t+9)}.$

Функция определена при $t \neq -9,\ t \neq 9$, непрерывна на промежутках $(-\infty; -9),\ (-9; 9),\ (9; +\infty)$.

$f(t)=0$ при $t=3$.



$$\left[\begin{array}{l} t<-9, \\ t=3, \\ t>9. \end{array}\right.$$

PS 1. Ответ можно было записать, не используя математическую символику, а выразить с помощью связки ИЛИ:

$$t < -9 \qquad \text{или} \qquad t = 3, \qquad \text{или} \qquad t > 9.$$

2. Промежутки непрерывности функции объединить в одно множество НЕЛЬЗЯ. Функция непрерывна только в каждом из этих промежутков в отдельности.

Основа обобщённого метода интервалов – теорема: «Если на интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ непрерывна и не обращается в 0, то на этом интервале она сохраняет постоянный знак». В школьном курсе имеют в виду квадратичную, дробно-рациональную функцию, но на ЕГЭ можно иметь в виду любую функцию, непрерывную и не обращающуюся в 0 на интервале.

Из теоремы следует, что, применяя метод интервалов, обязательно нужно вести речь **о функции**:

- какую функцию рассматриваем,
- где она определена и непрерывна,
- где она обращается в 0,
- какие знаки принимают значения функции на каждом промежутке знакопостоянства.

Промежутки, соответствующие неравенству, выделяем штриховкой. Отсутствие штриховки – отсутствие обоснования соответствия графической модели решаемому неравенству.

Совет: выбирая на числовой прямой промежутки, соответствующие множеству решений *нестрогого неравенства,*

- сначала установить промежутки, соответствующие строгому неравенству,
- а затем установить на числовой прямой (повторно) точки, в которых «работает знак =».

2-й способ (аналитический). Его лучше оформлять, используя знак равносильности.

$$\frac{2(t-3)^2}{(t-9)(t+9)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{2(t-3)^2}{(t-9)(t+9)} = 0, \\ \dfrac{2(t-3)^2}{(t-9)(t+9)} > 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t = 3, \\ \begin{cases} t \neq 3, \\ (t-9)(t+9) > 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t = 3, \\ t < -9, \\ t > 9. \end{array}\right.$$

Неравенство $(t-9)(t+9) > 0$ участник экзамена по профильной математике может решать устно.

Совет. Если левая часть нестрогого неравенства с 0 в правой части разложена на множители и хотя бы один из множителей в области определения неравенства **не принимает значения какого-либо знака**, то в области определения неравенства имеет смысл перейти к совокупности уравнения и строгого неравенства.

Продолжим выполнение задания.

Вернёмся ***к исходной переменной.***

$t < -9$ или $t = 3,$ или $t > 9$

$3^x < -9$ $\quad 3^x = 3$ $\quad 3^x > 3^2$

Нет решений $\quad x = 1$ $\quad x > 2$

Ответ: $\{1\} \cup (2; +\infty).$

В неравенствах форма ответа может быть и такой:

Ответ: $x \in \{1\} \cup (2; +\infty).$

Ответ: $\{1\}; (2; +\infty).$

Знак объединения (создание множества решений) – более правильная символика, но в математической литературе, по которой обучающиеся готовятся к ЕГЭ, присутствует третий вариант ответа, поэтому принимаем и его, как допустимый (но не идеально правильный).

Следующее задание из ЕГЭ-2024.

15. Решите неравенство $\dfrac{\log_2\left(2x^2-13x+20\right)-1}{\log_3\left(x+7\right)}\le 0$.

Выполним задание методом рационализации. Дополнительные обоснования метода не требуются, но строгость алгоритма самого метода обязательна.

СУТЬ МЕТОДА РАЦИОНАЛИЗАЦИИ

Метод рационализации заключается **в замене** сложного выражения $F(x)$ на более простое $G(x)$, **при которой неравенство** $G(x)\vee 0$ **равносильно неравенству** $F(x)\vee 0$ в области определения выражения $F(x)$.

Под знаком $\vee$ подразумевается один из знаков >, <, $\ge$, $\le$.

Основные типы выражений, для которых можно применить метод рационализации:

(в первом столбце – функция $F(x)$, которую заменяем, во втором столбце – функция $G(x)$, знакосовпадающая с $F(x)$ в ОДЗ выражения $F(x)$, то есть функция, КОТОРАЯ ПОЯВЛЯЕТСЯ в неравенстве вместо заменяемой функции $F(x)$). ГЛАВНОЕ: **ЗАМЕНА ВОЗМОЖНА ТОЛЬКО В ОБЛАСТИ ДОПУСТИМЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИСХОДНОГО НЕРАВЕНСТВА**

$F(x)$	$G(x)$
$\log_{h(x)} f(x) - \log_{h(x)} g(x)$	$(f(x)-g(x))(h(x)-1)$
$(h(x))^{f(x)} - (h(x))^{g(x)}$	$(f(x)-g(x))(h(x)-1)$
$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$	$f(x)-g(x)$
$\lvert f(x)\rvert - \lvert g(x)\rvert$	$(f(x)-g(x))(f(x)+g(x))$

$$\frac{\log_2\left(2x^2-13x+20\right)-1}{\log_3\left(x+7\right)}\le 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\log_2\left(2x^2-13x+20\right)-\log_2 2}{\log_3\left(x+7\right)-\log_3 1}\le 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-13x+20>0, \\ x+7>0, \\ \log_3\left(x+7\right)\ne 0, \\ \dfrac{\left(2x^2-13x+20-2\right)\left(2-1\right)}{\left(x+7-1\right)\left(3-1\right)}\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-13x+20>0, \\ x>-7, \\ x+7\ne 1 \\ \dfrac{2x^2-13x+18}{2\left(x+6\right)}\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

1) $2x^2-13x+20=0$

$D=169-160=9=3^2$

$$x_{1,2}=\frac{13\pm 3}{4}$$

$x_1=2,5, \qquad x_2=4$

Следовательно, $2x^2-13x+20=2\left(x-4\right)\left(x-2,5\right)$

$$\left|\begin{array}{l} 2)\ 2x^2-13x+18=0 \\ D=169-144=25=5^2 \\ x_{1,2}=\dfrac{13\pm 5}{4} \\ x_1=2, \qquad x_2=4,5 \\ \text{Следовательно, } 2x^2-13x+18=2\left(x-2\right)\left(x-4,5\right) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\left(x-4\right)\left(x-2,5\right)>0, \\ x>-7, \\ x\neq -6, \\ \dfrac{2\left(x-2\right)\left(x-4,5\right)}{2\left(x+6\right)}\leq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -7<x<-6, \\ -6<x<2,5, \\ x>4, \end{array}\right. \\ \dfrac{\left(x-2\right)\left(x-4,5\right)}{x+6}\leq 0. \end{cases}$$

Продолжим решение методом интервалов. В отличие от предыдущего случая здесь присутствуют ограничения области допустимых значений переменной. Поэтому **все шаги алгоритма** метода интервалов здесь реализуется в полном объёме:

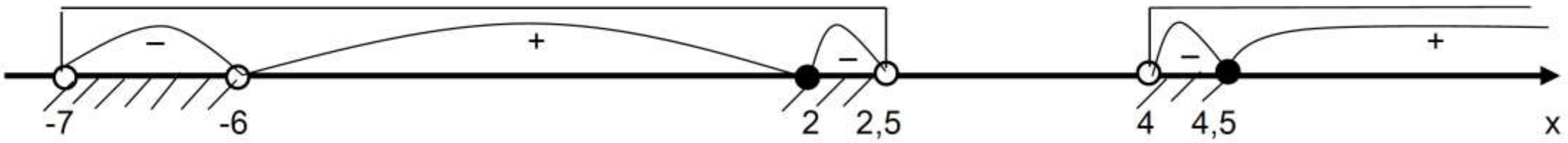
1. Ввести функцию, искусственно ограничивая её область определения
2. Найти нули функции
3. На числовую прямую нанести ограничения, **в полученном множестве допустимых значений переменной** нанести нули функции
4. Сформировать промежутки, в которых функция непрерывна и не обращается в 0, а следовательно, сохраняет постоянный знак.
5. На каждом образовавшемся промежутке определить знак функции
6. **Штриховкой выделить** те промежутки, которые соответствуют множеству решений неравенства
7. Объединить промежутки, создавая множество решений неравенства

Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{(x-2)(x-4,5)}{x+6},\ \text{где}\ x\in(-7;-6)\cup(-6;2,5)\cup(4;+\infty)$$

$$f(x)=0\ \text{при}\ x=2,\ x=4,5.$$

Предложение «На промежутках $(-7;-6)$, $(-6;2)$, $(2;2,5)$, $(4;4,5)$, $(4,5;+\infty)$ функция непрерывна и не обращается в 0, поэтому сохраняет постоянный знак» на ЕГЭ можно не писать.



Ответ: $(-7;-6)\cup[2;2,5)\cup(4;4,5]$

Следующее задание из ЕГЭ-2024.

15. Решите неравенство $\dfrac{3\lg^2 x-8}{\lg^2 x-4}\ge 2$.

Решение. $\dfrac{3\lg^2 x-8}{\lg^2 x-4}\ge 2$

Пусть $\lg x = t$, тогда неравенство примет вид $\dfrac{3t^2-8}{t^2-4}\ge 2$.

$$\frac{3t^2-8}{t^2-4}\ge 2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3t^2-8}{t^2-4}-2\ge 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3t^2-8-2t^2+8}{t^2-4}\ge 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{t^2}{t^2-4}\ge 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{t^2}{t^2-4}=0, \\ \dfrac{t^2}{t^2-4}>0 \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} t=0, \\ \begin{cases} t\ne 0, \\ t^2-4>0 \end{cases} \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} t=0, \\ t<-2, \\ t>2. \end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной

$$\left[\begin{array}{l} \lg x = 0, \\ \lg x < -2, \\ \lg x > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ \lg x < \lg 0{,}01, \\ \lg x > \lg 100 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ 0 < x < 0{,}01, \\ x > 100. \end{array}\right.$$

Ответ: $(0; 0{,}01) \cup \{1\} \cup (100; +\infty)$.

Обратим внимание на то, что, решая неравенство $\lg x < \lg 0{,}01$, единственно правильный путь – это **переход к равносильному неравенству** $0 < x < 0{,}01$.

Оформление перехода в виде: $\lg x < \lg 0{,}01$,

$x < 0{,}01$,

но с учётом ОДЗ $0 < x < 0{,}01$ – **грубая ошибка,** так как неравенства $\lg x < \lg 0{,}01$ и $x < 0{,}01$ неравносильны.

В процессе решения неравенств (уравнений) **НЕЛЬЗЯ ЗАМЕНЯТЬ** НЕРАВЕНСТВО (уравнение) ДРУГИМ НЕРАВЕНСТВОМ (уравнением), ЕСЛИ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ НЕРАВЕНСТВ (уравнений) **НЕ СОВПАДАЮТ**.

Если замена неравносильным неравенством (уравнением) **выполняется В СИСТЕМЕ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ОДЗ и С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ПОЛОЖЕНИЯ,** то **ЭТО** тоже **ПРАВИЛЬНО.**

Решать неравенства можно и методом систем. Решение опирается на теорему:

Произведение **двух множителей**

- больше 0, тогда и только тогда, когда множители принимают значения одного знака: +,+ или –,–,
- меньше 0, тогда и только тогда, когда множители принимают значения разных знаков: +,– или –,+.

$$a \cdot b > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0, \\ b > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0, \\ b < 0. \end{cases} \end{array}\right. \qquad a \cdot b < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0, \\ b < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0, \\ b > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Следствия из теоремы

$f(x)\cdot g(x)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\le 0,\\ g(x)\le 0.\end{cases}\end{array}\right.$	$f(x)\cdot g(x)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ge 0,\\ g(x)\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\le 0,\\ g(x)\ge 0.\end{cases}\end{array}\right.$
$\dfrac{f(x)}{g(x)}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ge 0,\\ g(x)> 0\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\le 0,\\ g(x)< 0.\end{cases}\end{array}\right.$	$\dfrac{f(x)}{g(x)}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ge 0,\\ g(x)< 0\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\le 0,\\ g(x)> 0.\end{cases}\end{array}\right.$

Рассмотрим задание 15 из тренировочной базы ЕГЭ- 2025.

Источник:

https://alexlarin.net/ege/2025/trvar471.html

Решите неравенство $\left(\dfrac{2}{9^x-3^{x+1}}+1\right)\log_2\left(9x^2-12x+5\right)\ge 0$

Решение. $\left(\dfrac{2}{9^x-3^{x+1}}+1\right)\log_2\left(9x^2-12x+5\right)\ge 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \dfrac{2}{9^x-3^{x+1}}+1\le 0, \\ \log_2\left(9x^2-12x+5\right)\le 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \dfrac{2}{9^x-3^{x+1}}+1\ge 0, \\ \log_2\left(9x^2-12x+5\right)\ge 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \dfrac{2+\left(3^x\right)^2-3\cdot 3^x}{\left(3^x\right)^2-3\cdot 3^x}\le 0, \\ \log_2\left(9x^2-12x+5\right)\le \log_2 1 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\left(3^x\right)^2-3\cdot 3^x+2}{3^x\left(3^x-3\right)}\ge 0, \\ \log_2\left(9x^2-12x+5\right)\ge \log_2 1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{\left(3^x\right)^2-3\cdot 3^x+2}{3^x-3}\le 0, \\ 9x^2-12x+5>0, \\ 9x^2-12x+5\le 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{\left(3^x\right)^2-2\cdot 3^x-3^x+2}{3^x-3}\ge 0, \\ 9x^2-12x+5\ge 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{\left(3^x\right)^2-3\cdot 3^x+2}{3^x-3}\le 0, \\ 9x^2-12x+5>0, \\ 9x^2-12x+4\le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{3^x\left(3^x-2\right)-\left(3^x-2\right)}{3^x-3}\ge 0, \\ 9x^2-12x+4\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{\left(3^x-2\right)\left(3^x-1\right)}{3^x-3}\le 0, \\ 9x^2-12x+5>0, \\ \left(3x-2\right)^2\le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{\left(3^x-2\right)\left(3^x-1\right)}{3^x-3}\ge 0, \\ \left(3x-2\right)^2\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{2}{3}, \\ \dfrac{\left(\sqrt[3]{9}-2\right)\left(\sqrt[3]{9}-1\right)}{\sqrt[3]{9}-3}\le 0, \\ \left(3x-2\right)^2+1>0, \end{cases} \\ \dfrac{\left(3^x-2\right)\left(3^x-1\right)}{3^x-3}\ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{\left(3^x-2\right)\left(3^x-1\right)}{3^x-3}\ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

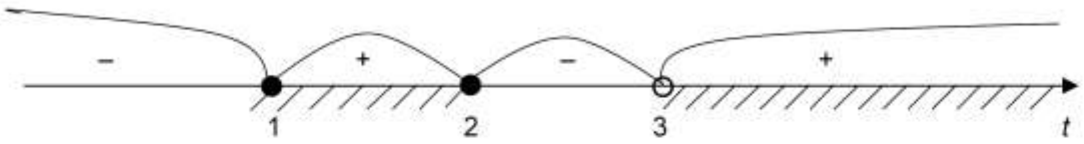
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{\left(3^x-2\right)\left(3^x-1\right)}{3^x-3}\ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

Пусть $3^x=t$, тогда неравенство примет вид $\dfrac{(t-2)(t-1)}{t-3}\ge 0$.

Рассмотрим функцию $f(t)=\dfrac{(t-2)(t-1)}{t-3}$

Функция определена при $t\ne 3$,

$f(t)=0$ при $t=1,\ t=2.$



$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{3}, \\ 1\le 3^x\le 2, \\ 3^x>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0\le x\le \log_3 2, \\ x=\dfrac{2}{3}, \\ x>1. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[0;\log_3 2\right]\cup\left\{\dfrac{2}{3}\right\}\cup(1;+\infty).$

Полезно знать и ещё один подход к решению: замена неравенства $h\left(f\left(x\right)\right) > h\left(g\left(x\right)\right)$ менее сложным неравенством на основании следующей теоремы:

- Если $h\left(x\right)$ – монотонно возрастающая функция, то неравенство $h\left(f\left(x\right)\right) > h\left(g\left(x\right)\right)$ равносильно неравенству $f\left(x\right) > g\left(x\right)$ в области определения исходного неравенства
- Если $h\left(x\right)$ – монотонно убывающая функция, то неравенство $h\left(f\left(x\right)\right) > h\left(g\left(x\right)\right)$ равносильно неравенству $f\left(x\right) < g\left(x\right)$ в области определения исходного неравенства.

Решая логарифмические и показательные неравенства, мы пользуемся этой теоремой, но круг применения теоремы значительно шире.

Тем, кто готовится не только к ЕГЭ, но и к ДВИ, нужно обратить внимание ещё на 2 метода решения неравенств:

- метод введения двух новых переменных,
- метод мажорант (метод оценки).

Решите неравенство $\dfrac{4^x-5\cdot 2^x+6}{1-3^{x-1}}\le 2\cdot 3^x-5\cdot 2^x+6$.

Источник: https://ege.sdamgia.ru/test?id=77924703

Решение $\dfrac{4^x-5\cdot 2^x+6}{1-3^{x-1}}\le 2\cdot 3^x-5\cdot 2^x+6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{3\cdot\left(2^{2x}-5\cdot 2^x+6\right)}{3-3^x}-2\cdot 3^x+5\cdot 2^x-6\le 0$.

Пусть $2^x=a,\ 3^x=b$, тогда неравенство примет вид

$\dfrac{3\cdot\left(a^2-5a+6\right)}{3-b}-2b+5a-6\le 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{3a^2 \cancel{-15a} \cancel{+18} \cancel{-6b} + 2b^2 \cancel{+15a} - 5ab \cancel{-18} \cancel{+6b}}{3-b} \le 0 \Leftrightarrow \frac{3a^2 - 5ab + 2b^2}{3-b} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3a^2 - 3ab - 2ab + 2b^2}{3-b} \le 0 \Leftrightarrow \frac{3a(a-b) - 2b(a-b)}{3-b} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(a-b)(3a-2b)}{3-b} \le 0.$$

Вернёмся к исходным переменным.

$$\frac{\left(2^x - 3^x\right)\left(3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x\right)}{3-3^x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{\left(1-\frac{3^x}{2^x}\right)\left(1-\frac{2\cdot 3^x}{3\cdot 2^x}\right)}{3-3^x} \le \frac{0}{2^x\cdot 3\cdot 2^x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\left(\frac{3}{2}\right)^0 - \left(\frac{3}{2}\right)^x\right)\left(\left(\frac{3}{2}\right)^0 - \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}\right)}{3-3^x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(0-x)\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(0-(x-1)\right)\left(\frac{3}{2}-1\right)}{(1-x)(3-1)} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x(1-x)}{8(1-x)} \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 1, \\ -\frac{x}{8} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le x < 1, \\ x > 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $[0;1)\cup(1;+\infty)$.

Решите неравенство $2^{x^2-4x+5} \le 1+\sin^2\dfrac{\pi x}{4}$.

1) $x^2-4x+5=\left(x^2-4x+4\right)+1=\left(x+2\right)^2+1$

2) $2^{x^2-4x+5}=2^{(x+2)^2+1}$

$$-\infty < x < +\infty$$

$$-\infty < x+2 < +\infty$$

$$0 \le \left(x+2\right)^2 < +\infty$$

$$1 \le \left(x+2\right)^2+1 < +\infty$$

$$2 \le 2^{(x+2)^2+1} < +\infty$$

3) $1+\sin^2\dfrac{\pi x}{4}$

$$-\infty < x < +\infty$$

$$-\infty < \frac{\pi x}{4} < +\infty$$

$$-1 \le \sin\frac{\pi x}{4} \le 1$$

$$0 \le \sin^2\frac{\pi x}{4} \le 1$$

$$1 \le 1+\sin^2\frac{\pi x}{4} \le 2$$

4) $2^{x^2-4x+5} \le 1+\sin^2\frac{\pi x}{4} \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le 2^{x^2-4x+5} < +\infty, \\ 1 \le 1+\sin^2\frac{\pi x}{4} \le 2, \\ 2^{x^2-4x+5} \le 1+\sin^2\frac{\pi x}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2-4x+5} = 2, \\ 1+\sin^2\frac{\pi x}{4} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+5=1, \\ \sin^2\frac{\pi x}{4}=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+4=0, \\ \sin^2\frac{\pi x}{4}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2=0, \\ \sin^2\frac{\pi x}{4}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ \sin^2\frac{\pi x}{4}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=2.$$

Ответ: 2 – единственное решение исходного неравенства.

Главное

1) Задание содержит изюминку, следовательно, **РЕШЕНИЕ ДОЛЖНО БЫТЬ ОСМЫСЛЕННЫМ**, формальное решение преподнесёт неприятный сюрприз.

2) Нельзя владеть 1-2 способами решения, **нужно освоить и теоретически, и практически весь арсенал методов решения**.

3) **Выбор метода, оптимального по трудозатратам, продолжительности решения, надёжности** – необходимое умение. Видеть альтернативные пути решения и выбрать лучший из них – это искусство.

4) **Самый надёжный способ решения неравенства**, следующий:

- к условию присоединить все ограничения и получить систему, равносильную исходному неравенству;

- полученную систему упростить, если есть такая возможность;

- решить отдельно все неравенства системы (если есть возможность, то решать не на всей числовой прямой, а только в области допустимых значений);

- построить геометрическую модель с выделением множества решений каждого неравенства и найти решение всей системы.

Поскольку исходное неравенство и система равносильны, то полученное множество будет являться и множеством решений исходного неравенства.

Желаю успеха в овладении умением!

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

ЖЕЛАЮ УСПЕХОВ!

Панина Н.А.
n.a.panina@mail.ru