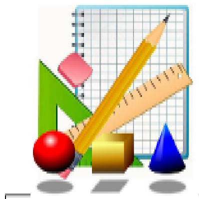
Интенсив «Решение заданий
повышенного и высокого уровня сложности»

Решение заданий с параметром

Панина Н. А.,
учитель математики
МБОУ СШ № 33,
г. Смоленск

2025-2026 учебный год



Уровень сложности задания: высокий

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ЗАДАНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек a = … и / или a = …	3
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только исключением точки a = … ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию расположения … (линий, корней уравнения и так далее) …	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	4

Независимо от метода решения (графический, аналитический или графо-аналитический), *поставленной задачи* (решить уравнение (неравенство, систему) при каждом значении параметра; указать решения, удовлетворяющие заданному ограничению; выяснить, при каких значениях параметра a, выполняется некоторое условие и т. д.) ИССЛЕДОВАНИЕ ДОЛЖНО БЫТЬ ПОЛНЫМ, СООТВЕТСТВУЮЩИМ ВСЕМ ДОПУСТИМЫМ ЗНАЧЕНИЯМ ПАРАМЕТРА.

Неполное исследование (потеря качественных состояний объекта) или решение типа «Заданное условие выполняется только тогда, когда … . Выясним, при каких значениях параметра это происходит.» – это **0 баллов независимо от правильности ответа** (к сожалению, такой *ошибочный подход* присутствует в интернет-подготовке к ЕГЭ).

❖В чём заключается ошибка указанного выше подхода?

Во-первых, необоснованные умозаключения недопустимы в развёрнутом ответе,

во-вторых, такое решение доказывает, что при найденных значениях параметра условие задачи выполняется, НО НЕ ДОКАЗЫВАЕТ, ЧТО ПРИ ДРУГИХ ЗНАЧЕНИЯХ ПАРАМЕТРА ОНО НИКОГДА НЕ ВЫПОЛНИТСЯ.

❖Как правильно поступить?

1) Рассмотреть **все допустимые** значения параметра и логически объединить их в подмножества (в каждом подмножестве исходный объект характеризуется новым качественным состоянием, отличным от предыдущего). **Каждому подмножеству значений параметра поставить в соответствие характеристику качественного состояния исходного объекта.** В этом и заключается полное исследование.

2) Из полученных результатов исследования сделать выборку в соответствии с выполняемым заданием, сопровождая решение словами **«… (то, что требуется в задании) … выполняется тогда и только тогда, когда … (указываются значения параметра или создаются модели всех искомых значений параметра …».**

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|x^2-ax+16\right|+\left|16x-a^2\right|=\left|\left|x^2-ax+16\right|-\left|a^2-16x\right|\right|$ имеет единственный корень.

Источник задания: Вариант №951-957 ЕГКР г. Москва 16 декабря 2025 года , задание 18.

Решение. $\left|x^2-ax+16\right|+\left|16x-a^2\right|=\left|\left|x^2-ax+16\right|-\left|a^2-16x\right|\right| \Leftrightarrow$ (1)

$$\Leftrightarrow \left|x^2-ax+16\right|+\left|16x-a^2\right|=\left|\left|x^2-ax+16\right|-\left|16x-a^2\right|\right|.$$

Заметим, что при любых действительных значениях x и параметра a верно, что

$$\left.\begin{array}{l}\left|x^2-ax+16\right|\ge 0,\\ \left|16x-a^2\right|\ge 0\end{array}\right| \Rightarrow \left|x^2-ax+16\right|+\left|16x-a^2\right|\ge 0,$$

$$\left|\left|x^2-ax+16\right|-\left|16x-a^2\right|\right|\ge 0.$$

Так как знаки обеих частей равенства совпадают, то преобразование «возведение обеих частей равенства в квадрат» в данном случае является тождественным преобразованием. Тогда

$$\left|x^2-ax+16\right|+\left|16x-a^2\right|=\left|\left|x^2-ax+16\right|-\left|16x-a^2\right|\right| \Leftrightarrow \left(\left|x^2-ax+16\right|+\left|16x-a^2\right|\right)^2=\left|\left|x^2-ax+16\right|-\left|16x-a^2\right|\right|^2.$$

Продолжим решение методом введения новых переменных.

Пусть $\left|x^2-ax+16\right|=m;\quad \left|16x-a^2\right|=n$, тогда полученное уравнение примет вид $(m+n)^2=|m-n|^2$.

$$(m+n)^2=|m-n|^2 \Leftrightarrow (m+n)^2=(m-n)^2 \Leftrightarrow m^2+2mn+n^2=m^2-2mn+n^2 \Leftrightarrow 4mn=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=0\\ n=0.\end{array}\right.$$

Прогноз. Большинство участников, выполняющих это задание, догадаются ввести новые переменные, но путь их решения будет иным, более традиционным:

$$\left|x^2-ax+16\right|+\left|16x-a^2\right|=\left\|x^2-ax+16\right|-\left|a^2-16x\right\| \Leftrightarrow \left|x^2-ax+16\right|+\left|16x-a^2\right|=\left\|x^2-ax+16\right|-\left|16x-a^2\right\|.$$

Пусть $\left|x^2-ax+16\right|=m;\quad \left|16x-a^2\right|=n$, тогда полученное уравнение примет вид $m+n=|m-n|$.

$$m+n=|m-n| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m-n\le 0,\\ m+n=-m+n\end{cases}\\ \begin{cases}m-n\ge 0,\\ m+n=m-n\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m-n\le 0,\\ 2m=0\end{cases}\\ \begin{cases}m-n\ge 0,\\ 2n=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m-n\le 0,\\ m=0\end{cases}\\ \begin{cases}m-n\ge 0,\\ n=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0-n\le 0,\\ m=0\end{cases}\\ \begin{cases}m-0\ge 0,\\ n=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}n\ge 0,\\ m=0\end{cases}\\ \begin{cases}m\ge 0,\\ n=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Вернёмся к исходным переменным:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left|16x-a^2\right|\ge 0,\\ \left|x^2-ax+16\right|=0\end{cases}\\ \begin{cases}\left|x^2-ax+16\right|\ge 0,\\ \left|16x-a^2\right|=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left|x^2-ax+16\right|=0\\ \left|16x-a^2\right|=0.\end{array}\right.$$

Участник получает тот же результат, что и при решении первым способом. Но обратим внимание на то, что, работая вторым способом, *разумнее* не дополнять ограничение, наложенное на подмодульное выражение, а *допустить частичное наложение ограничений:* ***случай «подмодульное выражение принимает значение 0» включить в обе системы совокупности.***

Продолжим решение, возвращаясь к результату, полученному первым способом: $\left[\begin{array}{l}m=0\\ n=0.\end{array}\right.$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} \left|x^2-ax+16\right|=0 \\ \left|16x-a^2\right|=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-ax+16=0 \\ 16x-a^2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-ax+16=0 \\ x=\dfrac{a^2}{16}. \end{array}\right. \qquad (2)$$

При любом значении параметра a решением исходного уравнения является $\dfrac{a^2}{16}$.

Проведём исследование квадратного уравнения $x^2-ax+16=0$ на наличие и количество решений по дискриминанту, понимая, что $D=a^2-64$.

Условие	$D<0$, то есть $a^2-64<0$, $a\in(-8;8)$	$D=0$, то есть $a^2-64=0$, $a=-8$ или $a=8$	$D>0$, то есть $a^2-64>0$, $a\in(-\infty;-8)\cup(8;+\infty)$
Количество корней при каждом значении параметра a	Нет корней	Ровно 1 корень	Ровно 2 корня

Учтём, что исходное уравнение (1) равносильно совокупности (2). Тогда из сказанного выше следует, что исходное уравнение

при $a\in(-8;8)$ имеет ровно одно решение $\dfrac{a^2}{16}$,

при $a=-8$, $a=8$ имеет не менее одного, но и не более двух решений. Если корень квадратного уравнения совпадает с решением $\dfrac{a^2}{16}$ – одно решение, не совпадает – два решения, при $a \in (-\infty; -8) \cup (8; +\infty)$ имеет два решения (при совпадении одного из корней квадратного уравнения с $\frac{a^2}{16}$), или три решения (при несовпадении корней с $\frac{a^2}{16}$) – случай не соответствует заданию.

Выясним, сколько корней имеет исходное уравнение при $a = -8$. Тогда исходное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + 8x + 16 = 0 \\ x = \frac{(-8)^2}{16} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x+4)^2 = 0 \\ x = \frac{64}{16} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 4. \end{array}\right.$$

Следовательно, при $a = -8$ исходное уравнение имеет ровно 2 корня.

Выясним, сколько корней имеет исходное уравнение при $a = 8$. Тогда

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 8x + 16 = 0 \\ x = \frac{8^2}{16} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-4)^2 = 0 \\ x = \frac{64}{16} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 4.$$

Следовательно, при $a = 8$ исходное уравнение имеет ровно один корень, и он равен 4.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно 1 корень тогда и только тогда, когда $-8 < a \le 8$.

Ответ: $-8 < a \le 8$.

Если обе части уравнения (неравенства) принимают исключительно неотрицательные значения при любых допустимых значениях переменных, то можно обе части уравнения (неравенства) возвести в квадрат, четвёртую степень, шестую и т. д. Получим уравнение (неравенство) равносильное исходному.

2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left(|x-a-1|+|x-a+1|\right)^2+a\left(|x-a-1|+|x-a+1|\right)+a^2-16=0$$

имеет ровно 2 различных корня.

Источник задания: Открытый вариант ЕГЭ 2025, профильный уровень.

Решение. $\left(|x-a-1|+|x-a+1|\right)^2+a\left(|x-a-1|+|x-a+1|\right)+a^2-16=0$. (1)

Пусть $|x-a-1|+|x-a+1|=y$. Тогда уравнение примет вид $y^2+ay+a^2-16=0$ (2)

Найдём множество значений функции $y=|x-a-1|+|x-a+1|$.

$-\infty<x<+\infty;\quad -\infty<a<+\infty$

Шаг 1. Выяснили, какие значения могут принимать x и a.

$|x-a-1|=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=a+1.$

$|x-a+1|=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=a-1.$

Шаг 2. Нашли нули модулей.

Заметим, что при любом действительном a верно неравенство $a-1<a+1$.

Шаг 3. Сравнили нули модулей.

		$a-1$		$a+1$		x
$x-a-1$	–		–		+	
$x-a+1$	–		+		+	

Шаг 4. Определили знаки подмодульных выражений в каждом промежутке допустимых значений x.

$$y=\begin{cases}-x+a+1-x+a-1, & \text{если } x<a-1,\\ -x+a+1+x-a+1, & \text{если } a-1\le x\le a+1,\\ x-a-1+x-a+1, & \text{если } x>a+1.\end{cases}$$

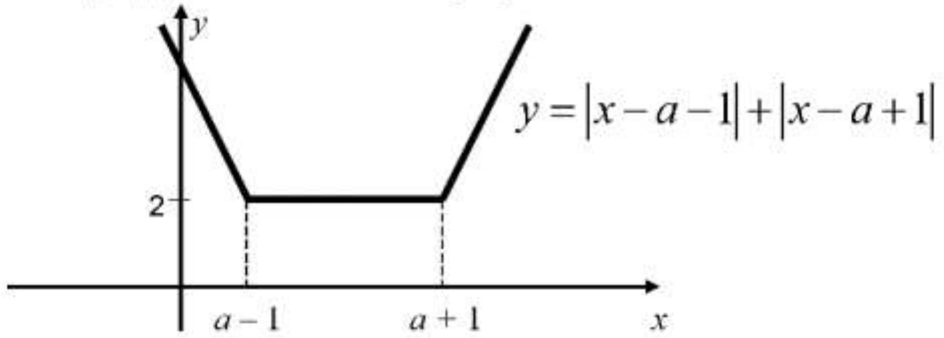
Шаг 5. Сняли знаки модулей. Получили кусочно заданную функцию.

$$y=\begin{cases}-2x+2a, & \text{если } x<a-1,\\ 2, & \text{если } a-1\le x\le a+1,\\ 2x-2a, & \text{если } x>a+1.\end{cases}$$

Если x стремится к $a - 1$ слева, то y стремится к $-2(a-1)+2a=-2a+2+2a=2=y(a-1)$ и это совпадает со значениями функции справа от точки $a - 1$.

Если x стремится к $a + 1$ справа, то y стремится к $2(a+1)-2a=2a+2-2a=2=y(a+1)$ и это совпадает со значениями функции слева от точки $a + 1$.

Следовательно, функция $y(x)$ является непрерывной.



Итак, множество значений функции $y(x)$ – это промежуток $[2;+\infty)$, причём значение 2 функция принимает бесконечно много раз (в любой точке промежутка (a – 1; a + 1)), а любое значение, большее 2, принимает дважды.

Следовательно,

если корнем уравнения (2) окажется число, меньшее, чем 2, то этому корню не будет соответствовать ни одного решения исходного уравнения (1), если корень уравнения (2) будет равен 2, то уравнение (1) будет иметь бесконечно много решений,

если корень уравнения (2) будет больше, чем 2, то этому корню будут соответствовать 2 различных корня исходного уравнения (1).

Установим соответствие между количествами корней уравнений (2) и (1).

Исследование уравнения (2) по дискриминанту $D = 64 - 3a^2$	**Количество корней уравнения (2) при каждом значении параметра** a	**Количество корней исходного уравнения (1) при каждом значении параметра** a
$D < 0$	Нет корней	Нет корней
$D = 0$	1 корень	- Нет корней, если корень уравнения (2) меньше 2
		- Бесконечно много корней, если корень уравнения (2) равен 2
		- Ровно 2 корня, если корень уравнения (2) больше 2
$D > 0$	2 различных действительных корня	- Нет корней, если корни уравнения (2) меньше 2
		- Бесконечно много корней, если меньший корень уравнения (2) меньше 2, а больший – равен 2
		- Ровно 2 корня, если меньший корень уравнения (2) меньше 2, а больший – больше 2
		- Бесконечно много корней, если меньший корень уравнения (2) равен 2 (тогда больший корень больше 2)
		- Ровно 4 корня, если меньший корень уравнения (2) больше 2 (тогда и больший корень больше 2)

Следовательно, исходное уравнение имеет ровно 2 различных корня тогда и только тогда, когда уравнение (2) имеет ровно один корень (D = 0) и этот корень больше 2 или имеет 2 различных действительных корня (D > 0), но один корень меньше 2, а другой – больше 2.

Рассмотрим первый случай.

Уравнение (2): $y^2+ay+a^2-16=0$.

$$D=a^2-4\left(a^2-16\right)=64-3a^2$$

Если $D=0$, то $y=\frac{-a}{2}$.

Получаем

$$\begin{cases}64-3a^2=0,\\ \frac{-a}{2}>2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2=\frac{64}{3},\\ \frac{-a}{2}>2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=-\frac{8}{\sqrt{3}}\\ a=\frac{8}{\sqrt{3}}\end{array}\right.\\ \frac{-a}{2}>2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-\frac{8}{\sqrt{3}},\\ \frac{-a}{2}>2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-\frac{8}{\sqrt{3}},\\ \frac{4}{\sqrt{3}}>2\end{cases} \Leftrightarrow a=-\frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

Рассмотрим второй случай: уравнение (2) имеет 2 различных действительных корня ($D>0$), но один корень меньше 2, а другой – больше 2.

Чтобы установить необходимое и достаточное условие сформулированного выше ограничения, рассмотрим все случаи расположения параболы $y=t^2+bt+c$ и проанализируем знак функции в точке 2.

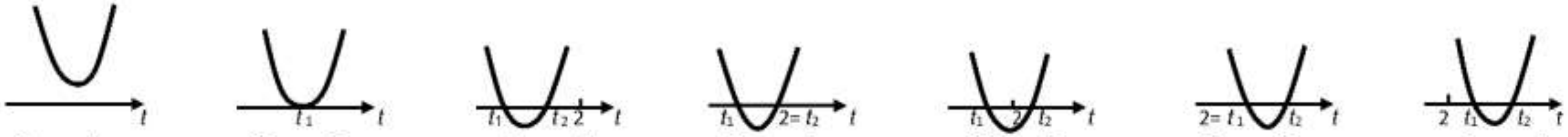


Схема 1	Схема 2	Схема 3	Схема 4	Схема 5	Схема 6	Схема 7
$D<0$	$D=0$	$D>0$	$D>0$	$D>0$	$D>0$	$D>0$
$y(2)>0$	$y(2)\ge 0$	$y(2)>0$	$y(2)=0$	$y(2)<0$	$y(2)=0$	$y(2)>0$

Графическим методом доказали, что один корень квадратного уравнения больше 2, а другой меньше 2, тогда и только тогда, когда $y(2)<0$.

Так как $y(2)=4+2a+a^2-16=a^2+2a-12=(a+1)^2-13$, то $(a+1)^2-13<0$.

$$(a+1)^2-13<0 \iff (a+1)^2<13 \iff -\sqrt{13}<a+1<\sqrt{13} \iff -1-\sqrt{13}<a<-1+\sqrt{13}.$$

Итак, исходное уравнение имеет ровно 2 различных корня тогда и только тогда, когда $a\in\left\{-\frac{8\sqrt{3}}{3}\right\}\cup\left(-1-\sqrt{13};-1+\sqrt{13}\right)$.

Ответ: $a=-\frac{8\sqrt{3}}{3}$; $-1-\sqrt{13}<a<-1+\sqrt{13}$.

Модель утверждения «один корень уравнения (2) меньше 2, а другой – больше 2» могла быть иной (система: дискриминант больше 0, меньший корень меньше 2, больший корень больше 2):

$$\begin{cases}64-3a^2>0,\\ \dfrac{-a-\sqrt{64-3a^2}}{2}<2,\\ \dfrac{-a+\sqrt{64-3a^2}}{2}>2\end{cases} \iff \begin{cases}64-3a^2>0,\\ -a-\sqrt{64-3a^2}<4,\\ -a+\sqrt{64-3a^2}>4\end{cases} \iff \begin{cases}64-3a^2>0,\\ \sqrt{64-3a^2}>-a-4,\\ \sqrt{64-3a^2}>a+4\end{cases} \iff \begin{cases}64-3a^2>0,\\ \sqrt{64-3a^2}>|a+4|\end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases}64-3a^2>0,\\ \left(\sqrt{64-3a^2}\right)^2>|a+4|^2\end{cases} \iff \begin{cases}64-3a^2>0,\\ 64-3a^2>(a+4)^2\end{cases} \iff 64-3a^2>(a+4)^2 \iff 64-3a^2>a^2+8a+16 \iff$$

$$\Leftrightarrow\quad 4a^2+8a-48<0 \quad\Leftrightarrow\quad a^2+2a-12<0 \quad\Leftrightarrow\quad (a+1)^2-13<0 \quad\Leftrightarrow\quad (a+1)^2<13 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad -\sqrt{13}<a+1<\sqrt{13} \quad\Leftrightarrow\quad -1-\sqrt{13}<a<-1+\sqrt{13}.$$

При работе с этой моделью важно было заметить, что

1) при любом значении параметра a значения $a + 4$ и $-a - 4$ являются противоположными. Поэтому система неравенств $\begin{cases}\sqrt{64-3a^2}>-a-4,\\ \sqrt{64-3a^2}>a+4\end{cases}$ равносильна неравенству $\sqrt{64-3a^2}>|a+4|$ («больше большего»),

2) в получившемся неравенстве обе части принимают только неотрицательные значения при любых допустимых значениях a, следовательно, можно обе части неравенства возвести в квадрат, сохраняя знак неравенства (в данном случае это тождественное преобразование),

3) система $\begin{cases}64-3a^2>0,\\ 64-3a^2>(a+4)^2\end{cases}$ равносильна неравенству $64-3a^2>(a+4)^2$, так как $(a+4)^2\ge 0$ при любом значении a и по свойству транзитивности «если $64-3a^2>(a+4)^2$ и $(a+4)^2\ge 0$, то $64-3a^2>0$».

Важный момент в аналитическом решении: не упускать из вида, что решения могут совпадать. **Обязательно нужно проводить исследование «при каких значениях параметра найденные решения совпадают?»**. Рассмотрим это на следующем примере.

3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\ln(3a-x)\cdot\ln(2x+2a-5)=\ln(3a-x)\cdot\ln(x-a)$$

имеет на отрезке [0; 2] ровно один корень.

Источник задания: Два варианта пробного ЕГЭ Пермь (профиль) ноябрь 2025 года

Решение. $\ln(3a-x)\cdot\ln(2x+2a-5)=\ln(3a-x)\cdot\ln(x-a) \quad\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a-x>0, \\ 2x+2a-5>0, \\ x-a>0, \\ \ln(3a-x)\cdot\ln(2x+2a-5)-\ln(3a-x)\cdot\ln(x-a)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3a, \\ 2x>5-2a, \\ x>a, \\ \ln(3a-x)\cdot\big(\ln(2x+2a-5)-\ln(x-a)\big)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<3a, \\ x>\dfrac{5}{2}-a, \\ x>a, \\ \left[\begin{array}{l} \ln(3a-x)=0 \\ \ln(2x+2a-5)=\ln(x-a) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3a, \\ x>\dfrac{5}{2}-a, \\ x>a, \\ \left[\begin{array}{l} 3a-x=1 \\ 2x+2a-5=x-a \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3a-1, \\ x<3a, \\ x>\dfrac{5}{2}-a, \\ x>a \end{cases} \\ \begin{cases} x=5-3a, \\ x<3a, \\ x>\dfrac{5}{2}-a, \\ x>a \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3a-1, \\ 3a-1<3a, \\ 3a-1>\dfrac{5}{2}-a, \\ 3a-1>a \end{cases} \\ \begin{cases} x=5-3a, \\ 5-3a<3a, \\ 5-3a>\dfrac{5}{2}-a, \\ 5-3a>a \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3a-1, \\ 3a-1 < 3a, \\ 3a-1 > \dfrac{5}{2} - a, \\ 3a-1 > a \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5-3a, \\ 5-3a < 3a, \\ 5-3a > \dfrac{5}{2} - a, \\ 5-3a > a \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3a-1, \\ a > \dfrac{7}{8}, \\ a > \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5-3a, \\ a > \dfrac{5}{6}, \\ a < \dfrac{5}{4} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3a-1, \\ a > \dfrac{7}{8} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5-3a, \\ \dfrac{5}{6} < a < \dfrac{5}{4}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Выясним, при каком значении параметра a корни совпадают.

$$\begin{cases} 3a-1 = 5-3a, \\ a > \dfrac{7}{8}, \\ \dfrac{5}{6} < a < \dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, \\ a > \dfrac{7}{8}, \\ \dfrac{5}{6} < a < \dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a = 1.$$

Заметим, что при найденном значении параметра корнем уравнения является 2

Тогда исходное уравнение равносильно совокупности систем:

$$\ln(3a-x)\cdot\ln(2x+2a-5)=\ln(3a-x)\cdot\ln(x-a)\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=5-3a,\\ \dfrac{5}{6}<a<\dfrac{7}{8}\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=5-3a,\\ x=3a-1,\end{array}\right.\\ \dfrac{7}{8}<a<1\end{cases}\\ \begin{cases}x=2,\\ a=1\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=5-3a,\\ x=3a-1,\end{array}\right.\\ 1<a<\dfrac{5}{4}\end{cases}\\ \begin{cases}x=3a-1,\\ a>\dfrac{5}{4}\end{cases}\end{array}\right.$$

Заметим, что при $\frac{5}{6}<a<\frac{5}{4}$ верно, что $5-3a>0$; при $a>\frac{7}{8}$ верно, что $3a-1>0$.

Следовательно, исходное уравнение имеет ровно один корень на промежутке [0; 2] тогда и только тогда, когда

$$\left(\begin{array}{l}\begin{cases}0\le 5-3a\le 2,\\ \dfrac{5}{6}<a<\dfrac{7}{8}\end{cases} \text{ или } \begin{cases}0\le 5-3a\le 2,\\ 3a-1>2,\\ \dfrac{7}{8}<a<1\end{cases} \text{ или } \begin{cases}0\le 3a-1\le 2,\\ 5-3a>2,\\ \dfrac{7}{8}<a<1\end{cases} \text{ или } a=1 \text{ или}\\ \begin{cases}0\le 5-3a\le 2,\\ 3a-1>2,\\ 1<a<\dfrac{5}{4}\end{cases} \text{ или } \begin{cases}0\le 3a-1\le 2,\\ 5-3a>2,\\ 1<a<\dfrac{5}{4}\end{cases} \text{ или } \begin{cases}0\le 3a-1\le 2,\\ a>\dfrac{5}{4}\end{cases}\end{array}\right), \quad \text{то есть}$$

$$\left(\begin{cases}1\le a\le\dfrac{5}{3},\\ \dfrac{5}{6}<a<\dfrac{7}{8}\end{cases} \text{ или } \begin{cases}1\le a\le\dfrac{5}{3},\\ a>1,\\ \dfrac{7}{8}<a<1\end{cases} \text{ или } \begin{cases}\dfrac{1}{3}\le a\le 1,\\ a<1,\\ \dfrac{7}{8}<a<1\end{cases} \text{ или } a=1 \text{ или } \begin{cases}1\le a\le\dfrac{5}{3},\\ a>1,\\ 1<a<\dfrac{5}{4}\end{cases} \text{ или } \begin{cases}\dfrac{1}{3}\le a\le 1,\\ a<1,\\ 1<a<\dfrac{5}{4}\end{cases} \text{ или } \begin{cases}\dfrac{1}{3}\le a\le 1,\\ a>\dfrac{5}{4}\end{cases}\right),$$

$$\text{то есть } \left[\begin{array}{l}\dfrac{7}{8}<a<1\\ a=1\\ 1<a<\dfrac{5}{4},\end{array}\right. \quad \text{то есть } \frac{7}{8}<a<\frac{5}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{7}{8}<a<\dfrac{5}{4}$.

Занятие, которое прошло сегодня, не заменяет, а дополняет занятие «Задание с параметром», проведенное в 2024-2025 учебном году. Основным методом прошлого занятия был графический, в этом году более подробно рассмотрели аналитический метод.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

ПАНИНА Н. А.

09.04.2026 состоится занятие «Задания с числами»

Презентации интенсива размещены на сайте:

http://www.dpo-smolensk.ru/rumo_new/l-pred-emc/2-matematika/intensiv.php