Особенности выполнения задания 16 (задачи на оптимизацию)

Панина Нина Александровна,
учитель математики МБОУ
«Средняя школа № 33, г. Смоленск»

Требования к развёрнутому ответу в задании 16

1) При построении математической модели **каждое** математическое выражение должно сопровождаться интерпретацией (толкованием смысла выражения).

2) Составляя модель, необходимо **отразить главную причинно-следственную связь**

3) Возможны различные способы решения, могут быть произвольными формы записи (текстовое сопровождение, таблица, логические схемы), но **из решения должен быть понятен ход рассуждений автора работы.**

Оценивается математическая грамотность и обоснованность решения.

16. Фирма собирается построить новый цех. Строительство нового цеха стоит 1060 млн. рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции в этом цехе равны $0,2x^2+2x+10$ млн. рублей в год. Если продукцию цеха продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в миллионах рублей) за один год составит $px-\left(0,2x^2+2x+10\right)$. Когда цех будет построен, каждый год фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. В первый год после постройки цеха цена продукции составит 18 тыс. рублей за единицу, каждый следующий год цена продукции увеличивается на 1 тыс. рублей за единицу. За сколько лет окупится строительство цеха?

Решение.

По условию x тыс. единиц продукции производят,

p тыс. рублей – стоимость 1 тыс. единиц товара,

($0,2x^2+2x+10$) млн. рублей в год – затраты на производство,

px млн. рублей – годовая выручка после продажи товара,

$\left(px-\left(0,2x^2+2x+10\right)\right)$ млн. рублей в год – прибыль. По условию задачи она должна быть наибольшей.

Рассмотрим функцию $f(x)=px-\left(0,2x^2+2x+10\right)$, где p – фиксированное (в течение года) число, $x > 0$.

$$f(x)=px-\left(0,2x^2+2x+10\right),$$

$$f(x)=px-0,2x^2-2x-10,$$

$$f(x)=-0,2x^2+(p-2)x-10.$$

Квадратичная функция. График – часть параболы (так как $x > 0$), ветви направлены вниз.

$x_0 = \dfrac{-p+2}{-0{,}4} = \dfrac{5(p-2)}{2}$ – абсцисса вершины параболы.

Так как $p_{\text{наим.}} = 18$, то $x_0 > 0$. Следовательно,

$$f_{\text{наиб.}} = f(x_0) = f\left(\frac{5(p-2)}{2}\right) = -0{,}2\left(\frac{5(p-2)}{2}\right)^2 + (p-2)\cdot\frac{5(p-2)}{2} - 10 =$$

$$= \frac{-0{,}2\cdot 25(p-2)^2}{4} + \frac{5(p-2)^2}{2} - 10 = \frac{5(p-2)^2}{4} - 10.$$

Следовательно, для того, чтобы прибыль была наибольшей, нужно выпускать в год $\dfrac{5(p-2)}{2}$ тысяч единиц продукции. При этом прибыль составит $\left(\dfrac{5(p-2)^2}{4} - 10\right)$ млн. рублей.

Выясним, через сколько лет окупится строительство цеха.

Год	Цена, тыс. рублей	Прибыль фирмы за год, млн. рублей	Суммарная прибыль за весь период, млн. рублей
1-й	18	$\frac{5(18-2)^2}{4}-10=\frac{5\cdot\overset{4}{\cancel{16}}\cdot 16}{\underset{1}{\cancel{4}}}-10=320-10=310$	310
2-й	19	$\frac{5(19-2)^2}{4}-10=\frac{5\cdot 17^2}{4}-10=\frac{5\cdot 289}{4}-10=351,25$	661,25
3-й	20	$\frac{5(20-2)^2}{4}-10=\frac{5\cdot 18\cdot 18}{4}-10=5\cdot 9\cdot 9-10=395$	1056,25 Меньше 1060
4-й	21	$\frac{5(21-2)^2}{4}-10=\frac{5\cdot 19^2}{4}-10=\frac{5\cdot 361}{4}-10=441,25$	1497,5 Больше 1060

Следовательно, строительство цеха окупится через 4 года.

Ответ: через 4 года.

PS 1) **В обосновании важно указать**, что абсцисса вершины параболы принадлежит области определения функции, (область определения устанавливается по смыслу задачи).

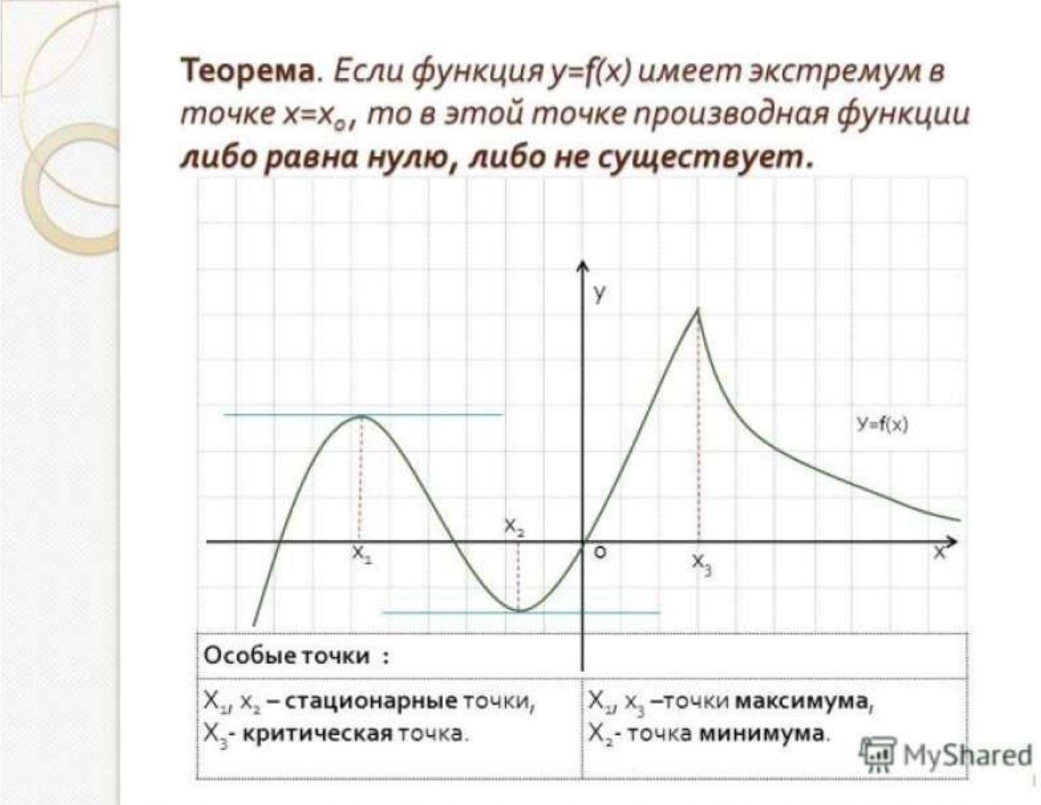
Вообще говоря, если абсцисса x_0 вершины параболы принадлежит области допустимых значений переменной, то наибольшее (наименьшее) значение функции достигается в абсциссе вершины параболы, а само наибольшее (наименьшее) значение совпадает с ординатой вершины параболы.

Если абсцисса x_0 вершины параболы не принадлежит закрытому промежутку – области допустимых значений переменной, то функция принимает наибольшее (наименьшее) значение на конце промежутка, а не в вершине параболы.

2) Строка «4-й год» в таблице могла отсутствовать. Вместо неё могло быть предложено следующее рассуждение:

Через 3 года суммарная прибыль составит 1056,25 млн. рублей, что меньше затрат на строительство (1060 млн. рублей) на 3,75 млн. рублей. Так как ежегодная прибыль выражается функцией $y=\frac{5(p-2)^2}{4}-10$ – возрастающей при $p \geq 18$, то прибыль за 4-й год окажется более 395 млн. рублей, что значительно больше, чем 3,75 млн. рублей. Следовательно, строительство цеха окупится за 4 года.

3) Исследование функции $f(x) = -0{,}2x^2 + (p-2)x - 10$ на наибольшее значение можно было провести не по виду графика и свойствам функции, а с помощью производной.



В этом случае в обосновании важно не потерять ответ на вопрос: «В каких точках производная не существует?». При их отсутствии так и пишем: «Нет таких x, в которых производная не существует».

Электронный ресурс: http://www.myshared.ru/slide/593427/

16. У владельца фабрики есть 2 станка. Оба станка используются для изготовления одинаковых деталей, но второй станок более современный. В результате, если первый станок работает m^2 часов, то за это время изготавливает $6m$ деталей; если второй станок работает m^2 часов, то за это время изготавливает $8m$ деталей. За каждый час работы (на каждом из станков) рабочим платят 250 рублей за час. На оплату труда рабочих выделено 25 000 рублей. Какое наибольшее количество деталей можно изготовить на эти деньги с помощью двух станков?

Источник: https://alexlarin.net/ege/2023/trvar429.html

Решение. На оплату труда выделено 25 000 рублей, за час работы рабочим платят 250 рублей. Следовательно, рабочие суммарно трудятся на этих станках 100 часов.

Пусть n^2 часов работает первый станок, тогда

$(100 - n^2)$ часов работает второй станок,

$6n$ деталей сделают на первом станке,

$8\sqrt{100-n^2}$ деталей сделают на втором станке,

$\left(6n+8\sqrt{100-n^2}\right)$ – общее число изготовленных деталей.

По условию задачи оно должно быть наибольшим.

По смыслу задачи

1) n^2, $6n$, $(100-n^2)$, $8\sqrt{100-n^2}$ – натуральные числа,

2) работать (изготавливать детали) должны оба станка.

Тогда $0 < n < 10$, n – натуральное число.

Математическая модель задачи:

Найти наибольшее значение функции $y = 6n + 8\sqrt{100-n^2}$, где n – натуральное число, $0 < n < 10$.

Функции $y(n)$ поставим в соответствие непрерывную функцию $f(x) = 6x + 8\sqrt{100-x^2}$, где x – действительное число из промежутка (0; 10). Заметим, что при натуральных значениях аргумента значения функции $f(x)$ совпадают с соответствующими значениями функции $y(n)$.

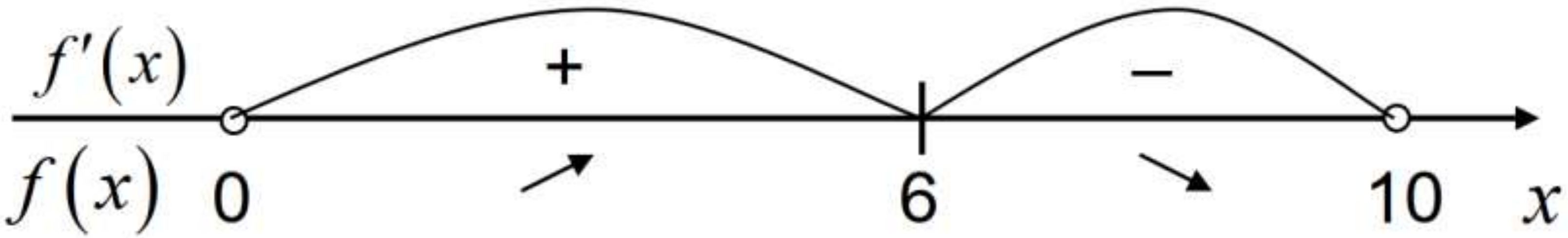
$$f'(x)=\left(6x+8\sqrt{100-x^2}\right)'=6+8\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}}=6-\frac{8x}{\sqrt{100-x^2}}=\frac{6\sqrt{100-x^2}-8x}{\sqrt{100-x^2}};$$

$$f'(x)=\frac{2\left(3\sqrt{100-x^2}-4x\right)}{\sqrt{100-x^2}}$$

На промежутке (0; 10) нет таких x, в которых производная не существует;

$$f'(x)=0,\ \text{если}\ \begin{cases}0<x<10,\\ 3\sqrt{100-x^2}-4x=0;\end{cases}\quad \begin{cases}0<x<10,\\ 3\sqrt{100-x^2}=4x;\end{cases}$$

$$\begin{cases}0<x<10,\\ 9\left(100-x^2\right)=16x^2;\end{cases}\quad \begin{cases}0<x<10,\\ 900=25x^2;\end{cases}\quad \begin{cases}0<x<10,\\ x^2=36;\end{cases}\quad x=6.$$



6 – единственная точка экстремума (точка максимума) на промежутке (0; 10), следовательно, при x = 6 функция $f(x)$ принимает наибольшее значение.

Так как 6 – натуральное число, то при n = 6 функция $y(n)$ принимает наибольшее значение.

$$y_{\text{наиб.}} = y(6) = 6 \cdot 6 + 8\sqrt{100 - 6^2} = 36 + 8 \cdot 8 = 100$$

100 деталей – наибольшее число деталей, произведенных с помощью двух станков.

Ответ: 100 деталей.

PS 1) Если значения неизвестных величин могут быть исключительно целочисленными или натуральными, то лучше вводить обозначения не x, y, а n, m.

Это непривычное обозначение может уберечь от ошибки, заставляя уходить от шаблонов и больше задумываться о смысле выполняемых действий.

Не забываем, что функция целочисленного или натурального аргумента не является непрерывной, она является дискретной. **Во всех точках области определения она является недифференцируемой**.

2) Если дискретная функция является линейной или квадратичной, то можно провести исследование, опираясь на свойства функции.

Но если она не является таковой и требуется исследование на наибольшее (наименьшее) значение, то **необходимо дискретной функции поставить в соответствие непрерывную функцию**, сохраняя структуру формулы.

Далее проводим исследование непрерывной функции с помощью производной, а затем составляем суждения для функции целочисленного или натурального аргумента.

Аналогичная задача для самостоятельного решения

16. Сергей владеет двумя цехами, расположенными в разных районах города. В цехах производится абсолютно одинаковая продукция, но в первом цехе используется более современное оборудование. В результате, если рабочие второго цеха трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за это время они производят $2t$ единиц продукции. Если же рабочие первого цеха трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за это время они производят $4t$ единиц продукции. В обоих цехах за каждый час работы рабочему платят 450 рублей. Сергей готов платить рабочим 1 640 250 рублей в неделю. На какое максимальное число единиц продукции он может рассчитывать?

Источник: https://alexlarin.net/ege/2024/trvar437.html

Ответ: на 270 единиц продукции.

16. На каждом из двух комбинатов изготавливают детали А и В. На первом комбинате работают 300 человек, и один рабочий изготавливает за смену 9 деталей А или 3 детали В. На втором комбинате работают 600 человек, и один рабочий изготавливает за смену 3 детали А или 9 деталей В. Оба комбината поставляют детали на комбинат, на котором собирает изделие, для изготовления которого нужны 2 детали А и 3 детали В. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать комбинат за смену?

Источник: https://alexlarin.net/ege/2024/trvar438.html

Решение. Пусть n человек изготавливают детали А на первом комбинате, тогда

$(300 - n)$ человек изготавливают детали В на первом комбинате,

$9n$ деталей А и $3(300 - n)$ деталей В будет изготовлено за смену на первом комбинате.

Пусть k человек изготавливают детали А на втором комбинате, тогда

$(600 - k)$ человек изготавливают детали В на втором комбинате,

$3k$ деталей А и $9(600 - k)$ деталей В будет изготовлено за смену на втором комбинате,

$(9n + 3k)$ деталей А и $(3(300 - n) + 9(600 - k))$ деталей В поступит на сборочный комбинат.

По условию задачи для изготовления изделия нужны 2 детали А и 3 детали В. Тогда

$$\frac{9n+3k}{2}=\frac{3(300-n)+9(600-k)}{3};$$

$$27n+9k=1800-6n+18\cdot 600-18k;$$

$$9n+3k=600-2n+3600-6k;$$

$$9k=4200-11n;$$

$$k=\frac{4200-11n}{9}.$$

$$600-k=600-\frac{4200-11n}{9}=\frac{5400-4200+11n}{9}=\frac{1200+11n}{9}.$$

На втором комбинате $\frac{4200-11n}{9}$ человек изготавливают детали А и $\frac{1200+11n}{9}$ человек – детали В.

По смыслу задачи n и k – целые числа, причём

$$\begin{cases} n \ge 0, \\ 300 - n \ge 0, \\ \dfrac{4200-11n}{9} \ge 0, \\ \dfrac{1200+11n}{9} \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \le n \le 300, \\ 4200 - 11n \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \le n \le 300, \\ n \le 381\dfrac{9}{11}; \end{cases} \quad 0 \le n \le 300.$$

Сборочный комбинат соберёт из деталей $\frac{9n+3k}{2}$ изделий.

$$\frac{9n+3k}{2} = \frac{9n + 3\cdot\dfrac{4200-11n}{9}}{2} = \frac{27n+4200-11n}{6} = \frac{16n+4200}{6} = \frac{8n+2100}{3}.$$

По условию задачи количество изделий должно быть наибольшим.

Математическая модель задачи: найти наибольшее значение функции $y=\frac{8n+2100}{3}$, если n – целое число, принадлежащее отрезку [0; 300].

$y=\frac{8n+2100}{3}$, где n – целое число, принадлежащее отрезку [0; 300], – линейная дискретная возрастающая функция.

Тогда $y_{\text{наиб.}}=y(300)=\frac{8\cdot 300+2100}{3}=1500.$ Это целое число, что соответствует смыслу задачи.

Проверим, являются ли целыми и неотрицательными значения выражений для обозначения количества рабочих.

Заметим, что если количество рабочих окажется целым неотрицательным числом, то в соответствии с условием задачи и количество сделанных ими деталей окажется целым неотрицательным числом.

$n = 300$ – целое неотрицательное число,

$300 - n = 300 - 300 = 0$ – целое неотрицательное число,

$k = \dfrac{4200 - 11n}{9} = \dfrac{4200 - 11 \cdot 300}{9} = 100$ – целое неотрицательное число,

$600 - k = 600 - 100 = 500$ – целое неотрицательное число.

Убедились, что 1500 действительно является наибольшим количеством изделий, собранных за смену на третьем комбинате.

Ответ: 1500 изделий.

PS 1) Информацию из условия задачи «для изготовления изделия нужны 2 детали А и 3 детали В» воспринимаем так: количество деталей А составляет 2 части, количество деталей В составляет 3 части. Зная это, уравнение можно составить следующим образом:

$$\underbrace{3\ \text{раза по 2 части}}_{\textit{детали А}} = \underbrace{2\ \text{раза по 3 части}}_{\textit{детали В}}.$$

Но надёжнее другой способ:

$$\underbrace{1\ \text{часть}}_{\textit{детали А}} = \underbrace{1\ \text{часть}}_{\textit{детали В}}$$

Заметим, что каждое из выражений, находящихся в левой и в правой частях последнего равенства, указывает на общее количество собираемых изделий.

2) Получение целочисленного результата при исследовании функции нельзя считать окончательным. Необходимо проверить, принимает ли каждое выражение, символизирующее целое и неотрицательное значение, именно значение целое и неотрицательное.

Если хотя бы для одного выражения это будет нарушено, то предварительно найденное значение аргумента нужно изменить до ближайшего целого значения (если это допустимо, то и в сторону уменьшения, и в сторону увеличения) и повторно перепроверить все выражения на целочисленность и неотрицательность. И так до тех пор, пока **все** выражения, для которых допустимы только целые и неотрицательные значения, не станут таковыми. После этого составляем ответ на вопрос задачи.

3) Завершая работу над этой задачей, полезно задать вопрос: «Как следует организовать работу на первом и втором комбинатах, чтобы сборочный комбинат мог собрать наибольшее количество изделий за смену?»

Это позволит более глубоко осмыслить завершающий этап решения задачи.

16. Бригаду из 30 человек нужно распределить по двум объектам. Если на первом объекте работает p человек, то каждый из них получает $200p$ рублей. Если на втором объекте работает p человек, то каждый из них получает $(50p + 300)$ рублей. Как нужно распределить рабочих по объектам, чтобы их суммарная зарплата оказалась наименьшей? Сколько рублей в этом случае придётся заплатить за сутки всем рабочим?

Источник: **ЕГЭ**. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов/ под ред. И. В. Ященко. – М. Изд. «Национальное образование», 2023. Вариант 30.

Решение. Пусть n человек работают на первом объекте, тогда $(30 - n)$ человек работают на втором объекте,

$200n$ рублей – зарплата одного рабочего на первом объекте за сутки,

$200n^2$ рублей – суммарная зарплата рабочих на первом объекте за сутки,

$(50(30 - n) + 300)$, то есть $(1800 - 50n)$ рублей – зарплата одного рабочего на втором объекте за сутки,

$(30 - n)(1800 - 50n)$ рублей – суммарная зарплата рабочих на втором объекте за сутки,

$(200n^2 + (30-n)(1800-50n))$ рублей – суммарная зарплата всех рабочих за сутки.

По условию задачи она должна быть наименьшей.

По смыслу задачи n – целое число, причём

$$\begin{cases} n \geq 0, \\ 30 - n \geq 0, \end{cases} \qquad 0 \leq n \leq 30.$$

Математическая модель задачи: найти наименьшее значение функции $y = 200n^2 + (30-n)(1800-50n)$, если n – целое число, принадлежащее отрезку [0; 30].

$$y = 200n^2 + 54\,000 - 1500n - 1800n + 50n^2;$$

$$y = 250n^2 - 3300n + 54\,000.$$

$$y = 250n^2 - 3300n + 54\,000.$$

Дискретная квадратичная функция.

$n_0 = \dfrac{3300}{500} = 6{,}6$ – абсцисса вершины параболы.

$6{,}6 \in [0;\, 30]$, но 6,6 не является целым числом, поэтому не может быть значением n, при котором целочисленная квадратичная функция $y = 250n^2 - 3300n + 54\,000$ примет наименьшее значение.

Два ближайших целых числа, принадлежащих промежутку [0; 30], между которыми находится число 6,6, – это 6 и 7. Заметим, что при этих значениях n и $(30–n)$ являются целыми числами. Тогда наименьшее значение функции $y = 250n^2 - 3300n + 54\,000$ – это наименьшее из значений $y(6)$ и $y(7)$.

$$y(6) = 250 \cdot 36 - 3300 \cdot 6 + 54\,000 = 9000 - 19\,800 + 54\,000 = 43\,200;$$

$$y(7) = 250 \cdot 49 - 3300 \cdot 7 + 54\,000 = 12\,250 - 23\,100 + 54\,000 = 43\,150.$$

Наименьшее значение функции равно 43 150 и достигается при $n = 7$.

Следовательно, 7 человек нужно направить на первый объект, остальных 23 человека – на второй объект. При этом суммарная зарплата за смену окажется наименьшей и составит 43 150 рублей.

Ответ: 7 человек на первый объект, 23 человека на второй, наименьшая суммарная зарплата за смену составит 43 150 рублей.

16. У фермера есть два поля, каждое площадью 10 га. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно разделить между этим культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором – 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 250 ц/га, а на втором – 200 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 1500 рублей за центнер, а свёклу – по цене 1800 рублей за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Источник: **ЕГЭ** 2024. Математика. Профильный уровень. 15 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий от разработчиков ЕГЭ …М.: Изд. «Экзамен», 2024. Вариант 9.

Решение. Пусть x га отведено под картофель на первом поле и y га – на втором. Тогда

$(10 - x)$ га отведено под свёклу на первом поле,

$(10 - y)$ га отведено под свёклу на втором поле,

$200x$ ц картофеля соберут на первом поле,

$300y$ ц картофеля – на втором,

$(200x + 300y)$ ц картофеля соберут с двух полей,

$250(10 - x)$ ц свёклы соберут на первом поле,

$200\ (10 - y)$ ц свёклы – на втором,

$(250(10 - x) + 200(10 - y))$, то есть $(4500 - 250x - 200y)$ ц свёклы соберут с двух полей,

$1500(200x + 300y)$, то есть $(300\,000x + 450\,000y)$ рублей – доход фермера от продажи картофеля,
$1800(4500 - 250x - 200y)$ – доход фермера от продажи свёклы, т. е. $(8\,100\,000 - 450\,000x - 360\,000y)$ рублей,
$(300\,000x + 450\,000y + 8\,100\,000 - 450\,000x - 360\,000y)$, то есть $(8\,100\,000 - 150\,000x + 90\,000y)$ рублей – доход фермера от продажи всей продукции.
Доход фермера окажется наибольшим, если x примет наименьшее допустимое значение, а y – наибольшее допустимое значение.
Наименьшее допустимое значение x – это 0, наибольшее допустимое значение y – это 10. Тогда наибольший доход составит $(8\,100\,000 - 0 + 900\,000)$, то есть 9 000 000 рублей.
Ответ: 9 млн. рублей – наибольший доход фермера.

PS Для нахождения оптимального значения исследовали не функцию, а выражение. **Его алгебраические слагаемые не связаны между собой никаким дополнительным условием, являются независимыми друг от друга**. Тогда можно применить свойства:
- если из некоторого числового значения вычитаем положительную величину, то значение полученного выражения меньше исходного числового значения,
- если к некоторому числовому значению прибавляем положительную величину, то значение полученного выражения больше исходного числового значения.

Следовательно, для получения наибольшего значения выражения нужно вычитать как можно меньше, а прибавлять как можно больше.

Главные особенности решений в задачах на оптимизацию

1. Если функция (дискретная или непрерывная) является линейной или квадратичной, то можно провести исследование, опираясь на свойства функции.

2. Если дискретная функция не является линейной или квадратичной, и требуется исследование на наибольшее (наименьшее) значение, то **необходимо дискретной функции поставить в соответствие непрерывную функцию**, сохраняя структуру формулы. После этого нужно провести исследование непрерывной функции с помощью производной, а затем составить суждение для функции целочисленного или натурального аргумента.

3. Получение целочисленного результата при исследовании функции нельзя считать окончательным. Необходимо проверить, принимает ли каждое выражение, символизирующее целое и неотрицательное значение, именно значение целое и неотрицательное.

Если хотя бы для одного выражения это будет нарушено, то предварительно найденное значение аргумента нужно изменить до ближайшего целого значения (если это допустимо, то и в сторону уменьшения, и в сторону увеличения) и повторно перепроверить все выражения на целочисленность и неотрицательность. И так до тех пор, пока **все** выражения, для которых допустимы только целые и неотрицательные значения, не станут таковыми. После этого составляем ответ на вопрос задачи.

4. Для нахождения оптимального значения в некоторых случаях можно исследовать не функцию, а выражение. Метод применим, если **алгебраические слагаемые выражения не связаны между собой никаким дополнительным условием, являются независимыми друг от друга**. Тогда для получения наибольшего значения выражения нужно вычитать как можно меньше, а прибавлять как можно больше. Для получения наименьшего значения нужно вычитать как можно больше, прибавлять как можно меньше.

Благодарю за внимание!

Панина Н. А.
+79051620770