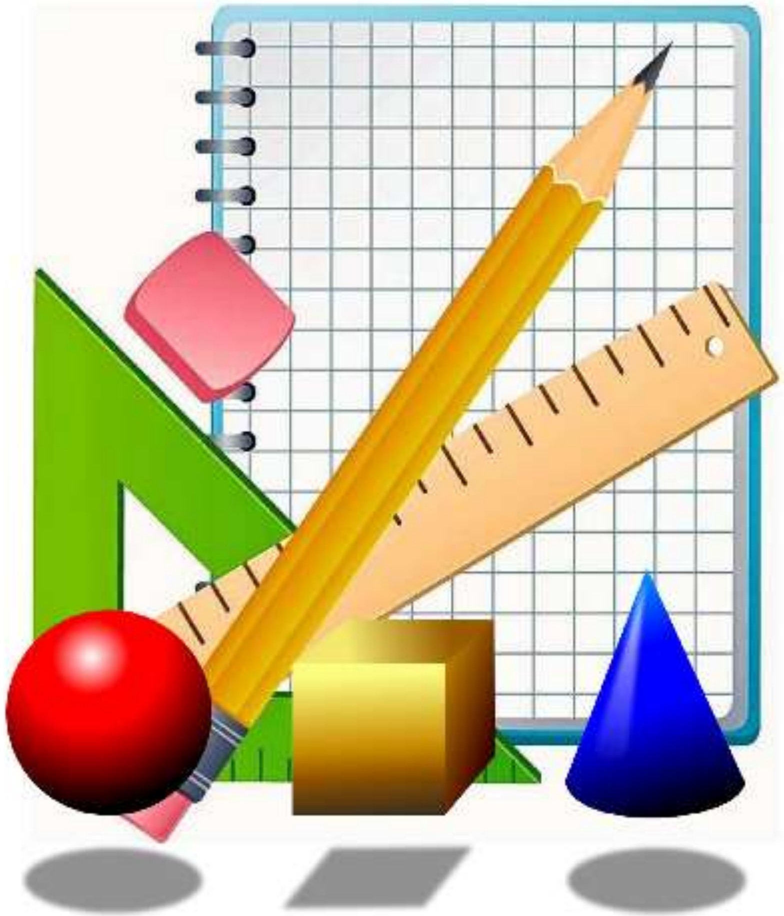
Интенсив «Решение заданий повышенного и высокого уровня сложности»



# Заключительное занятие

Панина Н. А., учитель математики
МБОУ СШ № 33, г. Смоленск

2025-2026 учебный год

## ЗАДАНИЯ С КРАТКИМ ОТВЕТОМ

1. Задания базового уровня сложности (№ 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8) являются открытыми. Банк этих задач системно представлен на сайте ФИПИ и в каталоге сайта «Решу ЕГЭ. Сдам ГИА».

**2.** Задания повышенного уровня (№ 5, 9, 10, 11, 12) могут оказаться неожиданными по своей формулировке, но методы выполнения этих заданий тщательно изучались в курсе математики 5-11 классов и не содержат элементов новизны. Рассмотрим примеры этих заданий из открытого варианта ФИПИ и тренировочных вариантов, размещённых в мае и последних числах апреля:

$\boxed{5}$ В коробке 4 синих, 3 красных и 9 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают 2 фломастера. Найдите вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастеры.

Источник задания: ФИПИ, открытые варианты КИМ ЕГЭ 2026 года, математика профильного уровня

Решение. С – синий фломастер, К – красный фломастер.

Требуется найти вероятность того, что вынут синий и красный фломастеры или красный и синий фломастеры.

$$P(CK)+P(KC)=\frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{4}{\cancel{16}}}\cdot\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{5}{\cancel{15}}}+\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{4}{\cancel{16}}}\cdot\frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{5}{\cancel{15}}}=\frac{1}{20}+\frac{1}{20}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}=0{,}1$$

Ответ: 0,1

5 Школа закупает мел у двух поставщиков. 60% мела от первого поставщика не крошится при письме, а у второго поставщика качественным является 40% мела. Всего не крошится 45% закупленного мела. Найдите вероятность того, что случайно взятый кусок мела оказался от первого поставщика.

Источник задания: https://alexlarin.net/ege/2026/trvar537.html

Обратим внимание на испытание: случайным образом берут **один кусок мела** из всех кусков, закупленных школой. Следовательно, модель решения – текстовая задача плюс классическая вероятность.

Решение. Пусть $x$ кусков мела школа закупит у первого поставщика, $y$ кусков – у второго, тогда $(x+y)$ кусков мела закупит школа,

$0{,}6x$ кусков мела от первого поставщика не крошится,

$0{,}4y$ кусков мела от второго поставщика не крошится,

$0{,}45(x+y)$ кусков мела в школе не крошится.

$0{,}6x+0{,}4y=0{,}45(x+y) \Leftrightarrow 0{,}6x+0{,}4y=0{,}45x+0{,}45y \Leftrightarrow 0{,}15x=0{,}05y \Leftrightarrow y=3x.$

$x$ кусков мела школа закупит у первого поставщика, $3x$ кусков – у второго,

$4x$ кусков мела закупит школа.

$n=4x$ – общее количество исходов испытания «выбрать 1 кусок мела»,

$m=x$ – количество исходов, благоприятствующих событию «он от 1-го поставщика».

$p=\dfrac{x}{4x}=\dfrac{1}{4}=0{,}25$.

Ответ: 0,25.

9 Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0$ = 60 км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a$ = 32 км/ч$^2$. Расстояние (в километрах) от мотоциклиста до города вычисляется по формуле $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, где $t$ – время (в часах), прошедшее после выезда из города. Определите, время, прошедшее после выезда мотоциклиста из города, если известно, что за это время он удалился от города на 154 км. Ответ дайте в минутах.

Источник задания: https://ege.fipi.ru/bank/index.php?proj=AC437B34557F88EA4115D2F374B0A07B **Номер: 01C5CD**

**На заключительном этапе решения важна техника работы:**

1) Смотрим на условие задачи и указываем, в каких единицах измерения получен ответ, понимая, что до этого работали по формуле. Получим 1,75 часа: Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0$ = 60 км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a$ = 32 км/ч$^2$. Расстояние (в километрах) от мотоциклиста до города вычисляется по формуле $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, где $t$ – время (в часах), прошедшее после выезда из города. Определите, время, прошедшее после выезда мотоциклиста из города, если известно, что за это время он удалился от города на 154 км. Ответ дайте в минутах.

2) Смотрим в текст задачи. В каких единицах измерения нужно дать ответ? Получим 105 минут: Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0$ = 60 км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a$ = 32 км/ч$^2$. Расстояние (в километрах) от мотоциклиста до города вычисляется по формуле $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, где $t$ – время (в часах), прошедшее после выезда из города. Определите, время, прошедшее после выезда мотоциклиста из города, если известно, что за это время он удалился от города на 154 км. Ответ дайте в минутах.

Ответ: 105

10 Имеется два сплава. Первый сплав содержит 60% меди, второй – 10% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 90 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 20% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Источник задания: ФИПИ, открытые варианты КИМ ЕГЭ 2026 года, математика профильного уровня

Один из способов решения: 1) Иллюстрируем условие задачи «методом стаканов» и рассчитываем массу чистой меди во всех трёх сплавах,

2) составляем уравнение, понимая, что медь в полученном сплаве – это медь из 1-го сплава плюс медь из 2-го сплава,

3) работаем с математической моделью, интерпретируем результат, отвечаем на вопрос задачи.

## Решение


$$\frac{60}{100}x \;+\; \frac{10}{100}(x+90) \;=\; \frac{20}{100}(2x+90)$$

$$6x \;+\; 1\cdot(x+90) \;=\; 2\cdot(2x+90);$$

$$6x+x+90=4x+180;$$

$$3x=90;$$

$$x=30.$$

Если $x$ = 30, то масса третьего сплава равна $2\cdot 30+90=150$ кг.

Ответ: 150 (в формате ЕГЭ наименования в задачах с кратким ответом не нужно указывать, точка после ответа не ставится)

$\boxed{10}$ Путешественник переплыл море на яхте со средней скоростью 18 км/ч. Обратно он летел на спортивном самолёте со скоростью 306 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Источник задания: ФИПИ, открытые варианты КИМ ЕГЭ 2026 года, математика базового уровня.

Решение. Пусть $x$ часов путешественник переплывал море на яхте, тогда

$18x$ км – длина его пути в одном направлении,

$\frac{18x}{306}=\frac{x}{17}$ часов он летел на самолёте,

$18x\cdot 2 = 36x$ км – длина всего пути,

$x+\frac{x}{17}=\frac{18x}{17}$ часов – время, затраченное на весь путь,

$36x:\frac{18x}{17}=36x\cdot\frac{17}{18x}=34$ км/ч – средняя скорость путешественника на протяжении всего пути.

Ответ: 34

$\boxed{10}$ В КИМах текстовые задачи с кратким ответом разнообразны. Это и задачи на смеси-сплавы, задачи на работу, задачи на проценты, задачи на движение (по шоссе, по реке, по пересечённой местности, по круговой трассе, движение протяжённых тел).

$\boxed{11}$ Последнее время в тренировочных вариантах увеличилась доля задач, в которых требуется найти ОРДИНАТУ ТОЧКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ графиков функций.

$\boxed{12}$ Найдите наименьшее значение функции $y = 3^{x^2+18x+82}$ на отрезке $[-10;10]$.

Решение. $y' = \left(3^{x^2+18x-82}\right)'$;

$y' = 3^{x^2+18x+82} \cdot \left(x^2+18x+82\right)' \cdot \ln 3;$

$y' = 3^{x^2+18x-82}\left(2x+18\right)\cdot \ln 3;$

$y' = 3^{x^2+18x+82} \cdot 2\left(x+9\right)\cdot \ln 3.$

На отрезке $[-10;10]$ нет таких $x$, в которых производная не существует.

$y' = 0$ при $x = -9,\qquad -9 \in [-10;10]$.

$y(-10) = 3^{100-180+82} = 3^2 = 9,$

$y(-9) = 3^{81-162+82} = 3,$

$y(10) = 3^{100+180+82} = 3^{362}.$

$\underset{[-10;10]}{y_{\text{наим.}}} = 3.$

Ответ: 3

Второй способ решения.

Функция $y=3^t$ возрастающая, поэтому функция $y=3^{x^2+18x+82}$ принимает наименьшее значение на отрезке $[-10;10]$ в той точке, в которой показатель степени принимает наименьшее значение.

Показатель степени – квадратный трёхчлен. Поставим ему в соответствие функцию $f(x)=x^2+18x+82$. Квадратичная. Графиком является парабола, ветви которой направлены вверх. Абсцисса вершины параболы –9.

$-9\in[-10;10]$, поэтому $\underset{[-10;10]}{y_{\text{наим.}}}=y(-9)=3^{81-162+82}=3$.

Ответ: 3

$\boxed{12}$ Найдите точку максимума функции $y=\ln(x+4)^2+2x+7$

Источник задания: [https://math-ege.sdamgia.ru/test?id=90659886](https://math-ege.sdamgia.ru/test?id=90659886)

Решение. $y=\ln(x+4)^2+2x+7$ $\qquad D(y)=(-\infty;-4)\cup(-4;+\infty)$.

$$y'=\left(\ln(x+4)^2\right)'+(2x)'+(7)';$$

$$y'=\frac{1}{(x+4)^2}\cdot\left((x+4)^2\right)'+2;$$

$$y'=\frac{1}{(x+4)^2}\cdot 2(x+4)+2;$$

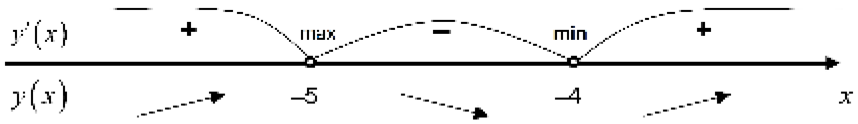
$$y'=\frac{2}{x+4}+2;$$

$$y'=\frac{2+2x+8}{x+4};$$

$$y'=\frac{2(x+5)}{x+4}.$$

В $D(y)$ нет таких $x$, в которых производная не существует.

$y'=0$ при $x=-5$.




Ответ: –5

# ЗАДАНИЯ С РАЗВЁРНУТЫМ ОТВЕТОМ

**13.** а) Решите уравнение $\cos^2 x+\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[5\pi; 6\pi]$.

Источник задания: ФИПИ, открытые варианты КИМ ЕГЭ 2026 года, математика профильного уровня

Рассмотрим способы решения задания а). Первый способ

а) $\cos^2 x+\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$;

$$\cos^2 x+\left(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)^2=\frac{1}{2};$$

$$\cos^2 x+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos x\right)^2=\frac{1}{2};$$

$$\cos^2 x+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(\sin x-\cos x)^2=\frac{1}{2};$$

$$\cos^2 x+\frac{1}{2}\left(\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x\right)=\frac{1}{2};$$

$$2\cos^2 x+\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)-2\sin x\cos x=1;$$

$$2\cos^2 x+1-2\sin x\cos x=1;$$

$$2\cos^2 x-2\sin x\cos x=0;$$

$$2\cos^2 x - 2\sin x\cos x = 0;$$

$$2\cos x(\cos x - \sin x) = 0;$$

$\cos x = 0$ или $\cos x - \sin x = 0;$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x - \cos x = 0;$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos x = \frac{0}{\sqrt{2}};$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos x = 0;$$

$$\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{4} = 0;$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0;$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \qquad \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

PS Второе уравнение совокупности $\cos x - \sin x = 0$ было решено методом введения дополнительного угла.

Можно было рассматривать его как однородное уравнение первой степени.

Типичная ошибка, которую допускают обучающиеся в этом случае, – деление обеих частей уравнения на $\cos x$, сопровождая деление ГОЛОСЛОВНЫМ утверждением $\cos x \neq 0$.

| ПРАВИЛЬНО | НЕПРАВИЛЬНО |
| --- | --- |
| $\cos x - \sin x = 0$<br>Пусть $\cos x = 0$, тогда<br>$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x = 0. \end{cases}$ Отсюда<br>$\cos^2 x + \sin^2 x = 0 + 0 = 0$, что противоречит тождеству<br>$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.<br>Следовательно, $\cos x \neq 0$. Тогда<br>$\frac{\cos x}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$;<br>$1 - \operatorname{tg} x = 0$. | $\cancel{\cos x - \sin x = 0 \,\vert\, : \cos x \neq 0;}$<br>$\cancel{1 - \operatorname{tg} x = 0;}$<br>$\cancel{\operatorname{tg} x = 1.}$ |

Второй способ. Заметим, что степень каждого слагаемого в левой части уравнения равна 2. Следовательно, можно применить приёмы понижения степени, основанные на применении формул $2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha;\qquad 2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha$.

$$\cos^2 x+\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2};$$

$$2\cos^2 x+2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1;$$

$$1+\cos 2x+1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=1;$$

$$\sin 2x-\cos 2x=1;$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\sin 2x\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\cos 2x\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\left[\begin{array}{l}2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z},\\ 2x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z};\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z},\\ 2x=\pi+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z};\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\quad k\in\mathbb{Z},\\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\pi k,\quad k\in\mathbb{Z};\qquad \frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$

**16.** В июле 2026 года планируется взять кредит на сумму 1,5 млн рублей на 10 лет (до июля 2036 года). Условия его возврата таковы:

- в январе каждого года долг возрастает на *r*% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в нечётные годы погашения (2027, 2029, 2031, 2033, 2035) долг должен уменьшаться на одну и ту же величину *X* по сравнению с предыдущим годом;
- в чётные годы погашения (2028, 2030, 2032, 2034, 2036) долг должен уменьшаться на одну и ту же величину *Y* по сравнению с предыдущим годом;
- известно, что *X* в два раза больше *Y*;
- к июлю 2036 года кредит должен быть полностью погашен.

Найдите *r* , если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 2,3 млн рублей.

Источник условия: https://alexlarin.net/ege/2026/trvar537.html

Анализируем условие и выясняем, каким образом клиент выплачивает кредит:

банк увеличивает долг на ... в январе каждого года,
ежегодно ДОЛГ ДОЛЖЕН УМЕНЬШАТЬСЯ на ...,
с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга

$\Rightarrow$ ежегодный платёж состоит из двух частей: банковские проценты ПЛЮС сумма, на которую уменьшается долг предыдущего года.

Следовательно, важно знать 1) НА СКОЛЬКО миллионов рублей банк увеличил долг в январе,

2) НА СКОЛЬКО миллионов рублей уменьшается долг предыдущего года.

Логика решения: на сколько банк увеличил долг $\rightarrow$ чему равна выплата $\rightarrow$ чему равен долг после выплаты.

Решение. Пусть 1,5 млн рублей = $A$ млн рублей,

$$\frac{r}{100} = k.$$

На $X$ млн рублей уменьшается долг по сравнению с долгом предыдущего года в нечётные годы, на $Y$ млн рублей – в чётные годы, причём $X = 2Y$ (по условию).

В соответствии с условием задачи имеем:

| Год | Банк увеличил долг в январе на … млн рублей | Выплата, млн рублей | Долг после выплаты, млн рублей |
|---|---|---|---|
| 2026 | - | - | $A$ |
| 2027 | $kA$ | $kA + X = kA + 2Y$ | $A - 2Y$ |
| 2028 | $kA - 2kY$ | $kA - 2kY + Y$ | $A - 3Y$ |
| 2029 | $kA - 3kY$ | $kA - 3kY + X = kA - 3kY + 2Y$ | $A - 5Y$ |
| 2030 | $kA - 5kY$ | $kA - 5kY + Y$ | $A - 6Y$ |
| 2031 | $kA - 6kY$ | $kA - 6kY + X = kA - 6kY + 2Y$ | $A - 8Y$ |
| 2032 | $kA - 8kY$ | $kA - 8kY + Y$ | $A - 9Y$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **2033** | $kA - 9kY$ | $kA - 9kY + X = kA - 9kY + 2Y$ | $A - 11Y$ |
| **2034**<br>**2035** | $kA - 11kY$<br>$kA - 12kY$ | $kA - 11kY + Y$<br>$kA - 12kY + X = kA - 12kY + 2Y$ | $A - 12Y$<br>$A - 14Y$ |
| **2036** | $kA - 14kY$ | $kA - 14kY + Y$ | $A - 15Y = 0$ |

По условию задачи к июлю 2036 года кредит должен быть полностью погашен.

$$A - 15Y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Y = \frac{A}{15}. \qquad\qquad Y = \frac{1,5}{15} = 0,1.$$

Общая сумма выплат после полного погашения кредита составит (в миллионах рублей) $10kA - 70kY + 15Y$. Это 2,3 млн рублей (по условию).

$$10kA - 70kY + 15Y = 2,3;$$

$$10k \cdot 1,5 - 70k \cdot 0,1 + 15 \cdot 0,1 = 2,3;$$

$$15k - 7k = 2,3 - 1,5;$$

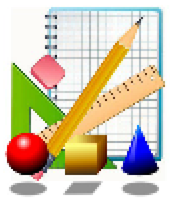
$$8k = 0,8;$$

$$k = 0,1.$$

$$\frac{r}{100} = 0,1;$$

$$r = 10.$$

Ответ: $r = 10$.



**16.** В июле 2027 года планируется взять кредит в банке на сумму 1 000 000 рублей на шесть лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на $r$% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь 2028 года необходимо выплатить 200 000 рублей;
- в последующие пять лет (2029-2033) долг должен уменьшаться равномерно на одну и ту же величину каждый год по сравнению с июлем предыдущего года;
- к июлю 2033 года кредит должен быть полностью погашен.

Найдите $r$, если известно, что общая сумма выплат составит 1 370 000 рублей.

Источник задания: https://alexlarin.net/ege/2026/trvar539.html

Анализируем условие и выясняем, каким образом клиент выплачивает кредит:

первая ВЫПЛАТА ФИКСИРОВАННАЯ $\Rightarrow$ в 2028 году важно знать сумму долга до платежа, размер выплаты и сумму долга после платежа;

остальные 5 выплат производятся так, чтобы в 2029-2033 годы ежегодно ДОЛГ УМЕНЬШАЛСЯ на ... рублей $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ в 2029-2033 годах ежегодный платёж состоит из двух частей:

банковские проценты ПЛЮС сумма, на которую уменьшается долг.

Задачу можно решать двумя способами (принимая за основу логику 2028 года, – первый способ, принимая за основу логику 2029-2033 годов, – второй способ).

Первый способ. Логика: сумма долга до платежа → платёж → сумма долга после платежа. Тогда, чтобы найти сумму платежа в 2029-2033 годах, нужно из суммы долга до платежа вычесть сумму долга после платежа.

Решение. Пусть $(100+r)\% = \frac{100+r}{100} = 1+\frac{r}{100} = k$.

Пусть на $x$ рублей уменьшается основной долг ежегодно в 2029-2033 годах. Тогда в соответствии с условием задачи имеем:

| Год | Долг до платежа после начисления процентов, рублей | Выплата, рублей | Долг после платежа (в конце года), рублей |
|---|---|---|---|
| 2027 | - | - | 1 000 000 |
| 2028 | $1\,000\,000k$ | 200 000 | $1\,000\,000k - 200\,000 = A$ |
| 2029 | $kA$ | $kA - (A - x) =$<br>$= kA - A + x$ | $A - x$ |
| 2030 | $k(A - x) = kA - kx$ | $kA - kx - (A - 2x) =$<br>$= kA - kx - A + 2x$ | $A - 2x$ |
| 2031 | $k(A - 2x) = kA - 2kx$ | $kA - 2kx - (A - 3x) =$<br>$= kA - 2kx - A + 3x$ | $A - 3x$ |
| 2032 | $k(A - 3x) = kA - 3kx$ | $kA - 3kx - (A - 4x) =$<br>$= kA - 3kx - A + 4x$ | $A - 4x$ |
| 2033 | $k(A - 4x) = kA - 4kx$ | $kA - 4kx - (A - 5x) =$<br>$= kA - 4kx - A + 5x$ | $A - 5x = 0$ |

По условию задачи к июлю 2033 года кредит должен быть полностью погашен, тогда

$A - 5x = 0; \qquad A = 5x;$

$1\,000\,000k - 200\,000 = 5x;$

$x = 200\,000k - 40\,000.$

Общая сумма выплат составит ($200\,000 + 5kA - 10kx - 5A + 15x$) рублей. Это 1 370 000 рублей.

$$200\,000 + 5kA - 10kx - 5A + 15x = 200\,000 + 5k\cdot 5x - 10kx - 5\cdot 5x + 15x =$$

$$= 200\,000 + 25kx - 10kx - 25x + 15x = 200\,000 + 15kx - 10x =$$

$$= 200\,000 + 15k(200\,000k - 40\,000) - 10(200\,000k - 40\,000) =$$

$$= 200\,000 + 3\,000\,000k^2 - 600\,000k - 2\,000\,000k + 400\,000 = 3\,000\,000k^2 - 2\,600\,000k + 600\,000.$$

$$3\,000\,000k^2 - 2\,600\,000k + 600\,000 = 1\,370\,000;$$

$$300k^2 - 260k + 60 = 137;$$

$$300k^2 - 260k - 77 = 0.$$

$$D = 2\cdot 13\cdot 10\cdot 2\cdot 13\cdot 10 + 4\cdot 3\cdot 100\cdot 77 = 400\cdot(169 + 231) = 400^2;$$

$$k_{1,2} = \frac{260 \pm 400}{600};$$

$k_1 = \dfrac{660}{600} = \dfrac{11}{10}, \quad k_2 < 0$ – не сответствует смыслу задачи.

$$1+\frac{r}{100}=\frac{11}{10};$$

$$\frac{r}{100}=\frac{1}{10};$$

$$r=10.$$

Ответ: $r$ = 10.

PS Схема заполнения таблицы по логике сумма долга до платежа → платёж → сумма долга после платежа:

**Шаг 1.** Строку «2028 год» заполняем слева направо:

1) рассчитываем сумму долга до платежа после начисления процентов (долг на конец предыдущего года составляет 100%, банк добавляет $r$%, следовательно, это (100 + $r$)% от суммы долга на конец предыдущего года),
2) выплата – это 200 000 рублей (по условию),
3) рассчитываем сумму долга после выплаты (на конец года): из суммы долга до выплаты вычитаем сумму платежа.

**Шаг 2.** Заполнение строк «2029-2033 годы» выполняем по столбцам:

1) заполняем столбец «долг после платежа (в конце года)», уменьшая долг предыдущего года в соответствии с условием задачи (в этой задаче – на одну и ту же величину),
2) с переходом на следующую строку заполняем столбец «сумма долга до платежа после начисления процентов» (техника расчёта такая же, как и в шаге 1)
3) на строке видим сумму долга до платежа (после начисления процентов), сумму долга после платежа, рассчитываем выплату (долг до платежа минус долг после платежа).

Второй способ. Логика: на сколько банк увеличил долг в январе → платёж → сумма долга после платежа. Тогда, чтобы найти сумму долга после платежа, нужно к сумме долга на конец предыдущего года прибавить сумму январского увеличения долга, а затем из результата вычесть сумму платежа.

Решение. Пусть $r\% = \frac{r}{100} = k$.

Пусть на $x$ рублей уменьшается основной долг ежегодно в 2029-2033 годах. Тогда в соответствии с условием задачи имеем:

| Год | Долг возрастает в январе на … рублей | Выплата, рублей | Долг после платежа, рублей |
|---|---|---|---|
| 2017 | - | - | 1 000 000 |
| 2028 | $1\,000\,000k$ | 200 000 | $1\,000\,000 + 1\,000\,000k - 200\,000 =$ $=1\,000\,000k + 800\,000 = A$ |
| 2029 | $kA$ | $kA + x$ | $A + kA - (kA + x) =$ $= A - x$ |
| 2030 | $k(A - x) = kA - kx$ | $kA - kx + x$ | $A - 2x$ |
| 2031 | $k(A - 2x) = kA - 2kx$ | $kA - 2kx + x$ | $A - 3x$ |
| 2032 | $k(A - 3x) = kA - 3kx$ | $kA - 3kx + x$ | $A - 4x$ |
| 2033 | $k(A - 4x) = kA - 4kx$ | $kA - 4kx + x$ | $A - 5x = 0$ |

По условию задачи к июлю 2033 года кредит должен быть полностью погашен, тогда

$A - 5x = 0$;  $A = 5x$;

$5x = 1\,000\,000k + 800\,000;$ $\qquad x = 200\,000k + 160\,000.$

Общая сумма выплат составит $(200\,000 + 5kA - 10kx + 5x)$ рублей. Это 1 370 000 рублей.

$200\,000 + 5kA - 10kx + 5x = 200\,000 + 5k\cdot 5x - 10kx + 5x = 200\,000 + 25kx - 10kx + 5x =$

$= 200\,000 + 15kx + 5x = 200\,000 + 15k(200\,000k + 160\,000) + 5(200\,000k + 160\,000) =$

$= 200\,000 + 3\,000\,000k^2 + 2\,400\,000k + 1\,000\,000k + 800\,000 =$

$= 3\,000\,000k^2 + 3\,400\,000k + 1\,000\,000.$

$3\,000\,000k^2 + 3\,400\,000k + 1\,000\,000 = 1\,370\,000;$

$300k^2 + 340k - 37 = 0.$

$D = 2\cdot 17\cdot 10\cdot 2\cdot 17\cdot 10 + 4\cdot 3\cdot 100\cdot 37 = 400\cdot(289+111) = 400^2;$

$k_{1,2} = \dfrac{-340 \pm 400}{600};$

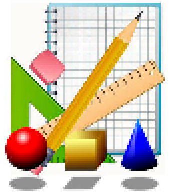
$k_1 = \dfrac{60}{600} = \dfrac{1}{10},$ $\quad k_2 < 0$ – не сответствует смыслу задачи.

$\dfrac{r}{100} = \dfrac{1}{10};$

$r = 10.$

Ответ: $r = 10$.

PS Во все годы таблицу заполняем построчно в направлении слева направо.



# ГЛАВНОЕ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ЗАДАНИЯ 15

**1.** Самый надёжный способ решения – метод тождественных преобразований.

**2.** При применении метода интервалов рассматриваем функцию, определяем её знак ТОЛЬКО НА ТЕХ ИНТЕРВАЛАХ, В КОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВО НЕ ТЕРЯЕТ СМЫСЛ.

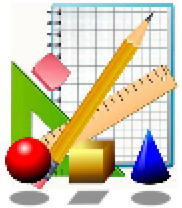
**3.** Правильно решаем неравенства типа $\log_3 x < \log_3 17$ или $\log_{0,3} x > \log_{0,3} 17$

$0 < x < 17$ $\qquad$ $0 < x < 17$.

**4.** Если хотя бы один из множителей неравенства $f(x) \cdot g(x) \cdot \ldots \cdot p(x) \le 0$ во множестве допустимых значений переменной $x$ не принимает отрицательные (положительные) значения, то нестрогое неравенство лучше рассмотреть как совокупность уравнения и строгого неравенства:

$$\left[\begin{aligned} &f(x) \cdot g(x) \cdot \ldots \cdot p(x) = 0, \\ &f(x) \cdot g(x) \cdot \ldots \cdot p(x) < 0. \end{aligned}\right.$$

Это позволит упростить неравенство и не потерять его изолированные решения.



## ГЛАВНОЕ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ЗАДАНИЯ 19

- **Если предстоит ответить: «Да, могло», то можно без обоснований привести пример (шаг 1)**

  **и доказать его полное соответствие условию задачи (шаг 2).**

- **Если предстоит ответить: «Нет, не могло», то решение можно выполнить двумя способами.**

**Первый: можно**

✓ ввести буквенную символику и составить буквенную модель объекта,

✓ в общем виде выполнить с объектом все манипуляции, указанные в условии задачи,

✓ обнаружить противоречие условию.

**Второй: можно**

- выяснить, каким свойством обладают изучаемые объекты,
- смоделировать множество ВСЕХ объектов, обладающих этим свойством,
- методом перебора показать, что КАЖДЫЙ ИЗ НИХ противоречит условию.

**Спасибо за внимание!**

**ЖЕЛАЮ УСПЕХА,**

**РЕЗУЛЬТАТА НА ВСЕ 100**

ПАНИНА Н. А.

Презентации интенсива размещены на сайте:

http://www.dpo-smolensk.ru/rumo_new/l-pred-emc/2-matematika/intensiv.php