Интенсив

2024-2025 учебный год

Геометрические задачи на плоскости и в трёхмерном пространстве

Панина Нина Александровна,

учитель МБОУ «СШ № 33», г. Смоленска

ЗАДАНИЯ 14 И 17

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ С РАЗВЁРНУТЫМ ОТВЕТОМ

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задания считаются выполненными верно, если экзаменуемый выбрал **правильный путь решения**, ***<u>из письменной записи решения понятен ход его рассуждений</u>***, **обоснованно получен верный ответ**. В этом случае ему выставляется полный балл, соответствующий данному заданию.

Из сказанного выше следует, что, ссылаясь на теорему, **ВСЕ причины умозаключений нужно указывать** (иначе – неполное обоснование, факт не считается доказанным).

Например, в ходе доказательства нужно высказать мысль «Прямая *AB* перпендикулярна плоскости *PKR*». Вспоминаем признак перпендикулярности прямой и плоскости (Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости) и чётко перечисляем все 5 причин (словесно или символикой) (прямые *MN* и *OF* выбраны в качестве примера):

прямая *AB* перпендикулярна прямой *MN*,
прямая *AB* перпендикулярна прямой *OF*,
прямые *MN* и *OF* пересекаются,
прямая *MN* лежит в плоскости *PKR*,
прямая *OF* лежит в плоскости *PKR*, –

только после этого формулируем заключение: «Следовательно, прямая *AB* перпендикулярна плоскости *PKR*»

$$\left.\begin{array}{l} AB \perp MN, \\ AB \perp OF, \\ MN \cap OF, \\ MN \subset (PKR), \\ OF \subset (PKR) \end{array}\right| \Rightarrow AB \perp (PKR)$$

Только в этом случае факт считается доказанным.

Обратим внимание, как доказать **параллельность прямой и плоскости**. Вспоминаем признак параллельности прямой и плоскости: Прямая, не лежащая в плоскости, параллельна плоскости, если она параллельна прямой, лежащей в плоскости, – и указываем 3 причины:

- прямая AB не лежит в плоскости α,
- прямая AB параллельна прямой OP, $\Rightarrow$ прямая AB параллельна плоскости α.
- прямая OP лежит в плоскости α

PS названия прямых и плоскостей здесь и в дальнейшем выбраны произвольно, названия необходимы для чёткого понимания правильности объяснения причин умозаключений в развёрнутых ответах.

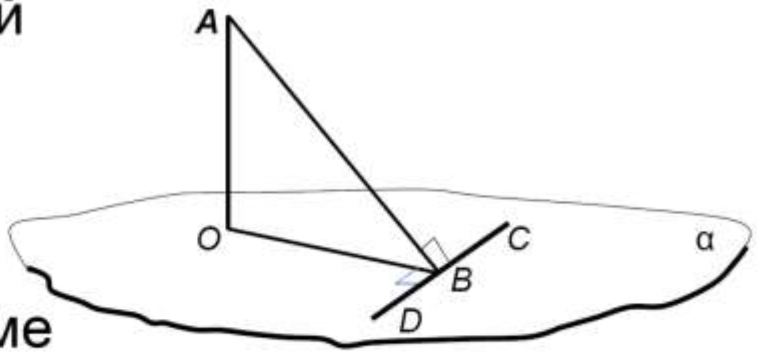
Формулировка теоремы о трёх перпендикулярах в учебнике «Геометрия 10» Мерзляка А.Г. и др. (учебник из перечня ФПУ)

Формулировка 1. Если прямая, принадлежащая плоскости, перпендикулярна проекции наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и самой наклонной. И наоборот, если прямая принадлежащая плоскости, перпендикулярна наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и проекции наклонной на эту плоскость.

Формулировка 2. Прямая, принадлежащая плоскости, перпендикулярна наклонной к этой плоскости тогда и только тогда, когда, эта прямая перпендикулярна проекции наклонной.

Следовательно, применяя теорему о трёх перпендикулярах, не нужно акцентировать внимание, какую именно теорему (прямую или обратную) применяем (даже в том случае, если обучение ведётся по учебнику Атанасяна А.Г.).

Правильное отражение причинно-следственных связей при применении теоремы о трёх перпендикулярах



- *AO* – перпендикуляр к плоскости α,
- *AB* – наклонная к плоскости α,
- *BO* – её проекция,
- прямая *CD* лежит в плоскости α,
- $CD \perp BO$

$\Rightarrow CD \perp AB$ (по теореме о трёх перпендикулярах)

или

- *AO* – перпендикуляр к плоскости α,
- *AB* – наклонная к плоскости α,
- *BO* – её проекция,
- прямая *CD* лежит в плоскости α,
- $CD \perp AB$

$\Rightarrow CD \perp BO$ (по теореме о трёх перпендикулярах)

Особенности оформления развёрнутого ответа

В контрольно-измерительном материале, который получает участник ЕГЭ, переход к части 2 сопровождается инструкцией:

«Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.»

1. Инструкция не требует краткую запись условия и задания в геометрических задачах. Записи «Дано: …», «Доказать: …» «Найти: …» не являются обязательными.
2. Термин «ответ» следует рассматривать в широком смысле: всё решение задания участником экзамена является его письменным ответом. «Ответы записывайте чётко и разборчиво» означает «все записи, относящиеся к решению, должны быть читаемыми (чёткими, разборчивыми).

3. В процессе подготовки к экзамену следует обратить особое внимание на написание латинской буквы D. Если в решении присутствуют обе точки D и O, то в некоторых работах их трудно отличить (оценивание в пользу экзаменуемого отсутствует).

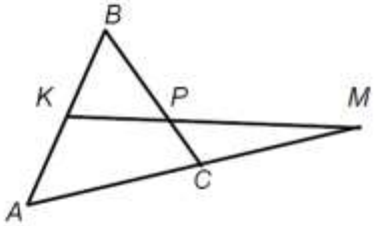
Совет: для записи прописной буквы D использовать не печатный, а рукописный латинский символ. Он совпадает с прописной рукописной буквой Д в русском алфавите.

4. По мере продвижения в решении задачи, получения новой информации о геометрическом объекте полезно наносить информацию на чертёж (и исходную, и получаемую в процессе решения). Наглядные представления подскажут ход решения, ускорят темп выполнения задания, если участник ЕГЭ владеет теоретическими знаниями по геометрии, условиями их применения.

На ЕГЭ разрешено без доказательства применять теоремы, определения, содержащиеся в школьных учебниках.

Помимо этого, без дополнительных пояснений (но со ссылкой на название теоремы) разрешено применять теоремы Менелая, Чевы, обратной теоремы Фалеса. Если применяется теорема не из школьного курса геометрии, то теорема должна быть сформулирована. Также допустимо применение элементов линейной алгебры (определители, матрицы).

Пример оформления фрагмента решения (плоский выносной чертёж, графически иллюстрирующий причинно-следственные связи, и формулировка теоремы в символьной форме с указанием названия теоремы:



по теореме Менелая $\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AK}{KB}=1$.

На трёхмерных чертежах причинно-следственные связи, указывающие на возможность применения теоремы, чертежом не иллюстрируем (отсутствует однозначность трактовки чертежа). Перечисляем причины и с указанием названия теоремы формулируем заключение (можно в символьном виде) или переходим к плоскому выносному чертежу.

При подготовке к ЕГЭ следует обратить внимание на теоремы, отражающие признаки геометрических фактов:

- признаки параллелограмма (ромба, прямоугольника, квадрата),

- признаки трапеции (две стороны параллельны, **а две другие – не параллельны**)

- признаки расположения точек на окружности (суммы противолежащих углов четырёхугольника равны 180^{o}),

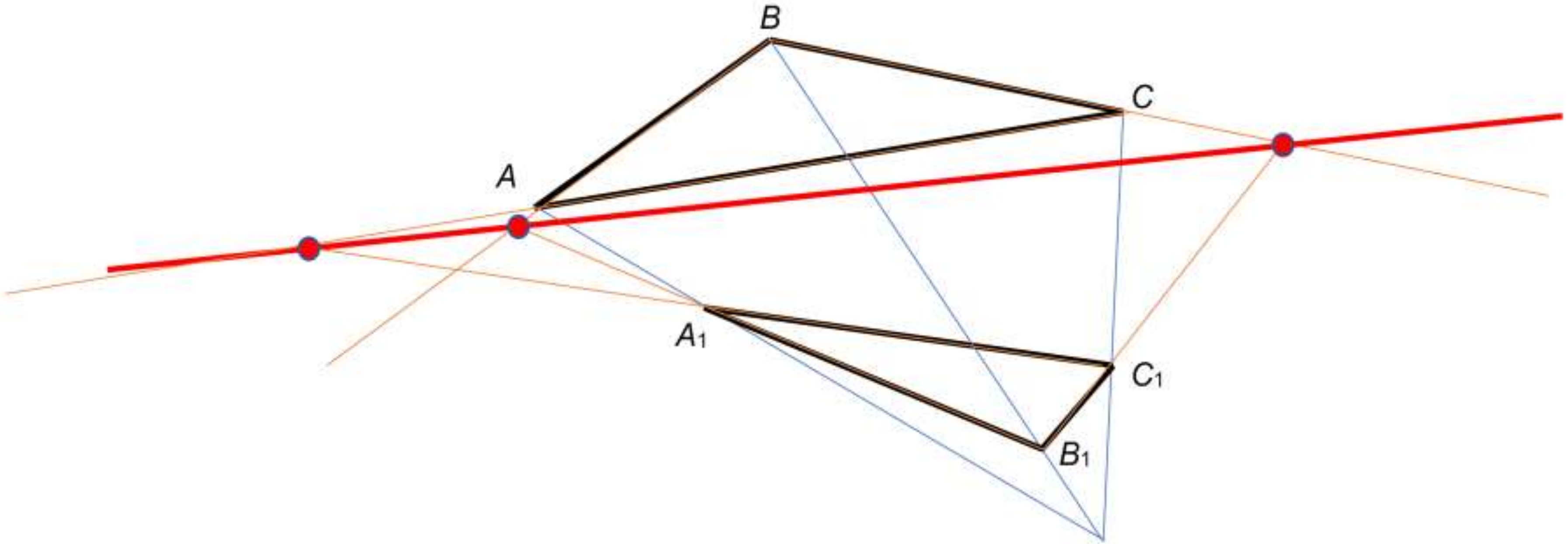
- признак расположения трёх точек на прямой (теорема Дезарга),

- признак расположения четырёх точек в одной плоскости (пространственная теорема Менелая)

и другие.

Теорема Дезарга (включена в программу углубленного обучения по математике):

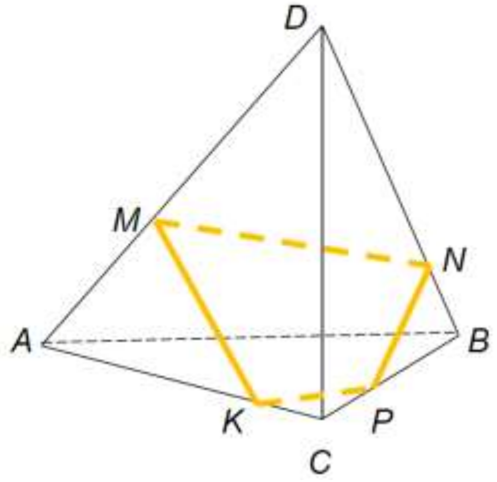
Если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ лежат в одной плоскости и прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке, то точки пересечения прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 принадлежат одной прямой.



Другой способ доказательства, что точки лежат на одной прямой, расчётный: если длина отрезка MN равна сумме длин отрезков MK и KN, то $K \in MN$.

Пространственная теорема Менелая (**теорема Менелая для тетраэдра**)

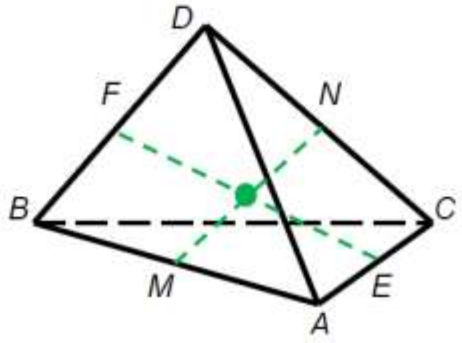
Точки *M*, *K*, *P* и *N*, расположенные соответственно на рёбрах *DA*, *AC*, *CB* и *BD* тетраэдра *DABC*, принадлежат одной плоскости тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\frac{DM}{MA}\cdot\frac{AK}{KC}\cdot\frac{CP}{PB}\cdot\frac{BN}{ND}=1$.

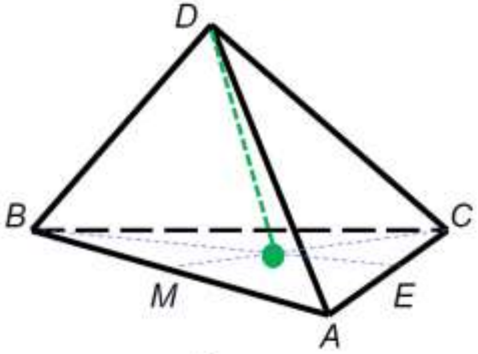


Курс углубленного обучения по геометрии расширился новыми для обучения понятиями и теоремами. Без доказательства их можно применять на ЕГЭ.

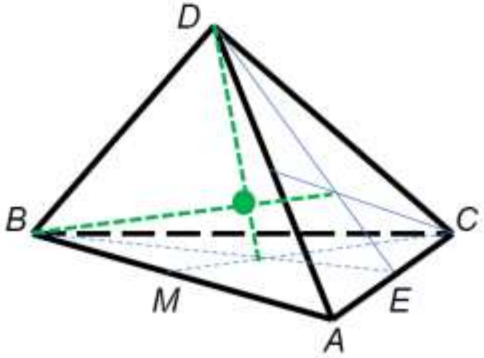
Средняя линия тетраэдра – отрезок, соединяющий середины скрещивающихся рёбер тетраэдра.

Средние линии тетраэдра пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.





Медиана тетраэдра – отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противолежащей грани.



Медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении 3 : 1, считая от вершины тетраэдра.

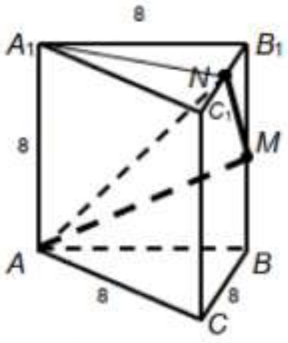
Как можно доказать перпендикулярность прямых в трёхмерном пространстве и найти угол между плоскостями

14. Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 8. Точки M и N – середины рёбер BB_1 и B_1C_1 соответственно.

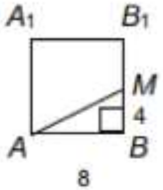
а) Докажите, что прямые AM и MN перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями AMN и BAA_1

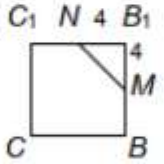
Источник: https://alexlarin.net/ege/2024/prb223.html



Решение. а) Первый способ (с применением теоремы, обратной теореме Пифагора)

1) 

$$AM^2 = AB^2 + BM^2$$
$$AM^2 = 8^2 + 4^2 = 64 + 16 = 80$$

2) 

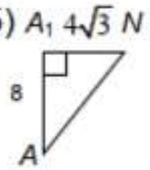
$$MN^2 = NB_1^2 + MB_1^2$$
$$MN^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32$$

3) Дополнительное построение: (AA_1N).

В этой плоскости расположен треугольник AA_1N.

4)

$AA_1 \perp (A_1B_1C_1)$, так как призма $ABCA_1B_1C_1$ является прямой
$A_1N \subset (A_1B_1C_1)$
$\Rightarrow AA_1 \perp A_1N$

5) 

A_1N – медиана и высота равностороннего треугольника $A_1B_1C_1$.

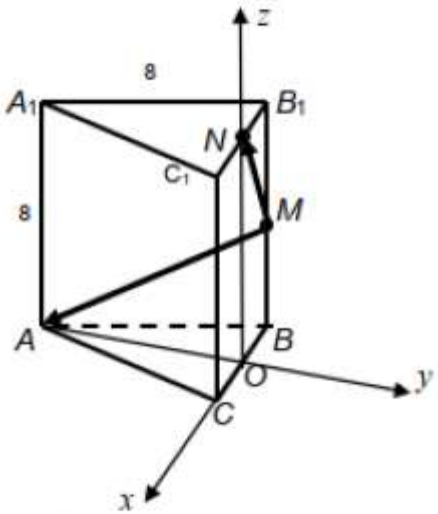
$$A_1N = A_1B_1 \sin 60^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$
$$AN^2 = AA_1^2 + A_1N^2$$
$$AN^2 = 8^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2 = 64 + 48 = 112$$

6) Учитывая результаты действий 5), 1) и 2), получаем

$$\left.\begin{array}{l} AN^2 = 112, \quad AM^2 = 80, \quad MN^2 = 32, \\ 112 = 80 + 32 \end{array}\right| \Rightarrow \quad AN^2 = AM^2 + MN^2$$

По теореме, обратной теореме Пифагора, заключаем, что треугольник *AMN* прямоугольный, градусная мера угла *AMN* равна 90°. Следовательно, прямые *AM* и *MN* перпендикулярны.
Утверждение доказано.

а) Второй способ (координатно-векторный метод)



Введём прямоугольную систему координат следующим образом:
начало координат *O* – середина отрезка *BC*,
ось Ox направим вдоль прямой *BC*,
ось Oy – вдоль прямой *AO*,
ось Oz – вдоль прямой *ON*.
Учтём, что каждое ребро призмы равно 8 (по условию), а *AO* – высота равностороннего треугольника *ABC*. Следовательно,

$AO = AC \cdot \sin 60^\circ = 8 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$. Тогда

$A\left(0; -4\sqrt{3}; 0\right)$, $B(-4; 0; 0)$, $C(4; 0; 0)$, $B_1(-4; 0; 8)$, $M(-4; 0; 4)$, $N(0; 0; 8)$, $\overrightarrow{MA}\left\{4; -4\sqrt{3}; -4\right\}$, $\overrightarrow{MN}\{4; 0; 4\}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MN} = 4 \cdot 4 + \left(-4\sqrt{3}\right) \cdot 0 + (-4) \cdot 4 = 16 - 16 = 0, \\ \left|\overrightarrow{MA}\right| \neq 0, \quad \left|\overrightarrow{MN}\right| \neq 0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{Угол между векторами } \overrightarrow{MA} \text{ и } \overrightarrow{MN} \text{ равен } 90^\circ. \text{ Следовательно, носители}$$

векторов, то есть прямые MA и MN перпендикулярны. Утверждение доказано.

б) Первый способ (линейный угол двугранного угла)

1) Плоскости AMN и BAA_1 пересекаются по прямой AM.

Рассмотрим один из двугранных углов, образовавшихся при пересечении этих плоскостей. Это двугранный угол A_1AMN.

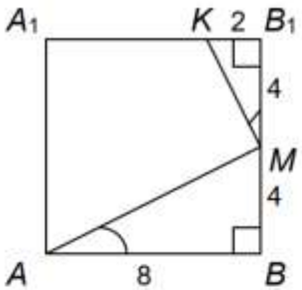
$NM \perp AM$ (доказано в задаче а),

NM лежит в полуплоскости AMN.

Дополнительное построение: в полуплоскости AA_1B_1 из точки M проведём луч MK, перпендикулярный к AM.

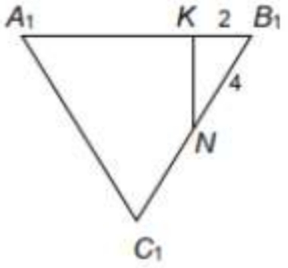
K – точка пересечения MK и A_1B_1.

$$\left.\begin{array}{l} NM \perp AM, \quad NM \subset (AMN), \\ MK \perp AM, \quad MK \subset (AA_1B_1), \\ A_1AMN - \text{двугранный угол} \end{array}\right| \Rightarrow \angle KMN - \text{линейный угол двугранного угла } A_1AMN.$$

2) 

Треугольники ABM и MB_1K подобны (по двум углам). Тогда $\dfrac{AB}{MB_1} = \dfrac{BM}{B_1K}$; $\dfrac{8}{4} = \dfrac{4}{B_1K}$; $B_1K = 2$

Следовательно, $KM^2 = KB_1^2 + B_1M^2$; $KM^2 = 2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$

3) 

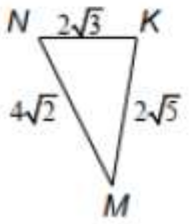
В плоскости $A_1B_1C_1$ соединим точки K и N. Учтём, что треугольник $A_1B_1C_1$ равносторонний.

По теореме косинусов $KN^2 = B_1K^2 + B_1N^2 - 2B_1K \cdot B_1N \cdot \cos A_1B_1C_1$

$$KN^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 4 + 16 - 16 \cdot \frac{1}{2} = 12$$

4) Установлено, что $MN^2 = 32; \quad KM^2 = 20; \quad KN^2 = 12.$

Тогда $MN = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}; \quad KM = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}; \quad KN = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$



$$KN^2 = KM^2 + MN^2 - 2 \cdot KM \cdot MN \cdot \cos KMN;$$

$$12 = 20 + 32 - 2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \cos KMN;$$

$$16\sqrt{10} \cdot \cos KMN = 40;$$

$$\cos KMN = \frac{40}{16\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{20} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

$$\angle KMN = \arccos\frac{\sqrt{10}}{4}.$$

Линейный угол острый, следовательно, угол между плоскостями *AMN* и BAA_1 равен $\arccos\frac{\sqrt{10}}{4}$.

Ответ: б) $\arccos\frac{\sqrt{10}}{4}$.

б) Второй способ (координатно-векторный метод)
Угол между плоскостями равен углу между перпендикулярами к этим плоскостям.
1) Составим уравнение плоскости *AMN*, зная, что плоскость проходит через точки $A\left(0; -4\sqrt{3}; 0\right)$, $M(-4; 0; 4)$, $N(0; 0; 8)$.

Уравнение плоскости имеет вид $ax + by + cz + d = 0$.

Имеем:

$$\begin{cases} a\cdot 0+b\cdot\left(-4\sqrt{3}\right)+c\cdot 0+d=0, \\ a\cdot(-4)+b\cdot 0+c\cdot 4+d=0, \\ a\cdot 0+b\cdot 0+c\cdot 8+d=0; \end{cases} \quad \begin{cases} -4b\sqrt{3}+d=0, \\ -4a+4c+d=0, \\ 8c+d=0; \end{cases} \quad \begin{cases} b=\dfrac{d\sqrt{3}}{12}, \\ 4a=-\dfrac{d}{2}+d, \\ c=-\dfrac{d}{8}; \end{cases} \quad \begin{cases} a=\dfrac{d}{8}, \\ b=\dfrac{d\sqrt{3}}{12}, \\ c=-\dfrac{d}{8}. \end{cases}$$

Уравнение плоскости *AMN*: $\frac{d}{8}x+\frac{d\sqrt{3}}{12}y-\frac{d}{8}z+d=0.$

По смыслу задачи $d\neq 0$. Тогда $3x+2\sqrt{3}y-3z+24=0$ – уравнение плоскости *AMN*.

Вектор $\vec{n_1}\left\{3;\,2\sqrt{3};\,-3\right\}$ перпендикулярен плоскости *AMN*.

2) Составим уравнение плоскости BAA_1, зная, что плоскость проходит через точки $B(-4;0;0)$, $A\left(0;-4\sqrt{3};0\right)$, $A_1\left(0;-4\sqrt{3};8\right)$.

Уравнение плоскости имеет вид $ax+by+cz+d=0$.

Имеем:

$$\begin{cases} a\cdot(-4)+b\cdot 0+c\cdot 0+d=0, \\ a\cdot 0+b\cdot\left(-4\sqrt{3}\right)+c\cdot 0+d=0, \\ a\cdot 0+b\cdot\left(-4\sqrt{3}\right)+c\cdot 8+d=0; \end{cases} \quad \begin{cases} -4a+d=0, \\ -4\sqrt{3}b+d=0, \\ -4\sqrt{3}b+8c+d=0; \end{cases} \quad \begin{cases} a=\dfrac{d}{4}, \\ b=\dfrac{d\sqrt{3}}{12}, \\ 8c=0; \end{cases} \quad \begin{cases} a=\dfrac{d}{4}, \\ b=\dfrac{d\sqrt{3}}{12}, \\ c=0. \end{cases}$$

Уравнение плоскости BAA_1: $\frac{d}{4}x+\frac{d\sqrt{3}}{12}y+0z+d=0.$

По смыслу задачи $d\neq 0$. Тогда $3x+\sqrt{3}y+0z+12=0$ – уравнение плоскости BAA_1.

Вектор $\overrightarrow{n_2}\left\{3; \sqrt{3}; 0\right\}$ перпендикулярен плоскости BAA_1.

3) Найдём угол между векторами $\overrightarrow{n_1}\left\{3; 2\sqrt{3}; -3\right\}$ и $\overrightarrow{n_2}\left\{3; \sqrt{3}; 0\right\}$.

$$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2} = 3\cdot 3 + 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} + (-3)\cdot 0 = 9 + 6 = 15,$$

$$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2} = \left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|\cdot\cos\left(\widehat{\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}}\right)$$

$$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2} = \sqrt{9+12+9}\cdot\sqrt{9+3+0}\cdot\cos\left(\widehat{\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}}\right) = \sqrt{30}\cdot\sqrt{12}\cdot\cos\left(\widehat{\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}}\right).$$

$$\sqrt{6\cdot 5}\cdot\sqrt{6\cdot 2}\cdot\cos\left(\widehat{\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}}\right) = 15;$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}}\right) = \frac{15}{6\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{20} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}}\right) > 0$, следовательно, угол между векторами острый. Тогда он равен углу между плоскостями.

Итак, угол между плоскостями AMN и BAA_1 равен $\arccos\frac{\sqrt{10}}{4}$.

Ответ: б) $\arccos\frac{\sqrt{10}}{4}$.

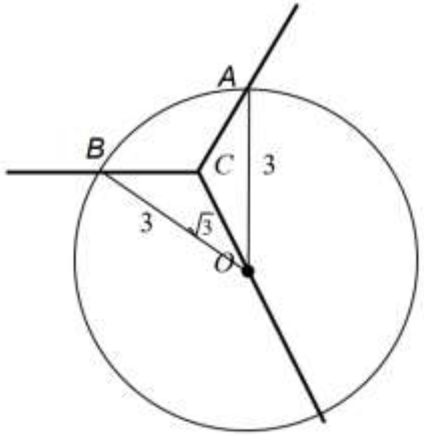
17. Дан угол величиной 120° с вершиной *C*. Вне угла на продолжении его биссектрисы взята точка *O* так, что $OC=\sqrt{3}$. С центром в точке *O* построена окружность радиуса 3, пересекающая стороны угла в точках *A* и *B*.

а) Докажите, что *OC* = *BC* = *CA*.

б) Найдите площадь фигуры, ограниченной сторонами угла и дугой окружности, заключённой между ними.

Источник: https://alexlarin.net/ege/2024/trvar451.html

Решение. а)



$$\left.\begin{array}{l}\angle ACB=120^{\circ}\text{ (по условию)}\\ CO-\text{ биссектриса угла}\end{array}\right|\Rightarrow \angle ACO=\angle BCO=120^{\circ}.$$

1) Рассмотрим $\triangle OCA$.

$OA=3,\quad OC=\sqrt{3},\quad \angle ACO=120^{\circ}.$ По теореме синусов $\dfrac{OA}{\sin ACO}=\dfrac{OC}{\sin CAO}$;

$$\frac{3}{\sin 120^{\circ}}=\frac{\sqrt{3}}{\sin CAO};\quad \sin CAO=\frac{\sqrt{3}\cdot\sin 120^{\circ}}{3}=\frac{\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{3}=\frac{1}{2}.$$

Так как угол *CAO* является острым, то $\angle CAO=30^{\circ}$.

Тогда $\angle COA=180^{\circ}-120^{\circ}-30^{\circ}=30^{\circ}$, треугольник *CAO* является равнобедренным с основанием *AO*.

Следовательно, $CA=OC$.

2) Рассмотрим $\triangle OCB$. $BO=3,\quad OC=\sqrt{3},\quad \angle BCO=120^{\circ}.$

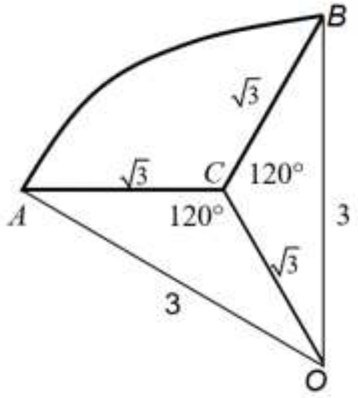
По теореме синусов $\dfrac{OB}{\sin BCO}=\dfrac{OC}{\sin CBO};\quad \dfrac{3}{\sin 120^{\circ}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin CBO};\quad \sin CBO=\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sin 120^{\circ}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{3}=\dfrac{1}{2}.$

Так как угол *CBO* является острым, то $\angle CBO=30^{\circ}$. Тогда $\angle COB=180^{\circ}-120^{\circ}-30^{\circ}=30^{\circ}$, треугольник *CBO* является равнобедренным с основанием *BO*. Следовательно, $BC=OC$.

3) $\left.\begin{matrix} CA = OC, \\ BC = OC \end{matrix}\right| \Rightarrow OC = BC = CA$

Утверждение а) доказано.

б) Найдём площадь фигуры, ограниченной сторонами угла и дугой окружности, заключённой между ними.



$S_{\text{фигуры}} = S_{\text{сектора } AOB} - S_{\triangle ACO} - S_{\triangle BCO}$

1) Рассмотрим треугольники ACO и BCO. Они равны по двум сторонам и углу между ними: $AC = BC$, сторона OC общая; $\angle ACO = \angle BCO = 120°$.
2) Так как треугольники равны, то и площади их равны. Тогда $S_{\text{фигуры}} = S_{\text{сектора } AOB} - 2S_{\triangle ACO}$.
3) $S_{\triangle ACO} = \frac{1}{2} AC \cdot OC \cdot \sin ACO = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sin 120° = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

4) $\angle AOC = \angle BOC = 30°$ (доказано в п. а). Следовательно, центральный угол сектора равен 60°.

Тогда $S_{\text{сектора } AOB} = \frac{1}{6} S_{\text{круга}} = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 3^2 = \frac{3\pi}{2}$

5) $S_{\text{фигуры}} = S_{\text{сектора } AOB} - 2S_{\triangle ACO} = \frac{3\pi}{2} - 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{3\pi - 3\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $S_{\text{фигуры}} = \frac{3\pi - 3\sqrt{3}}{2}$.

- В рамках времени ЕГЭ объяснить все причины невозможно, но это и не требуется. Однако, если из совокупности причин вытекает НЕ ЕДИНСТВЕННОЕ заключение, то обоснование является **обязательным** (Пример: известно, что синус угла в треугольнике равен $\frac{1}{2}$. Чему равен угол треугольника? Почему, например, 30°, а не 150°?)

- Не обязательно описывать причины словесно или представлять их формулировками теорем. В ряде случаев их достаточно графически проиллюстрировать на чертеже (равенство, подобие треугольников, возможность применения теоремы Пифагора и т. д.)

- Если выполнен выносной чертёж и на него нанесены числовые данные, то можно не записывать формулу буквенной символикой, а сразу приступить к расчёту значения.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Панина Н.А.
n.a.panina@mail.ru