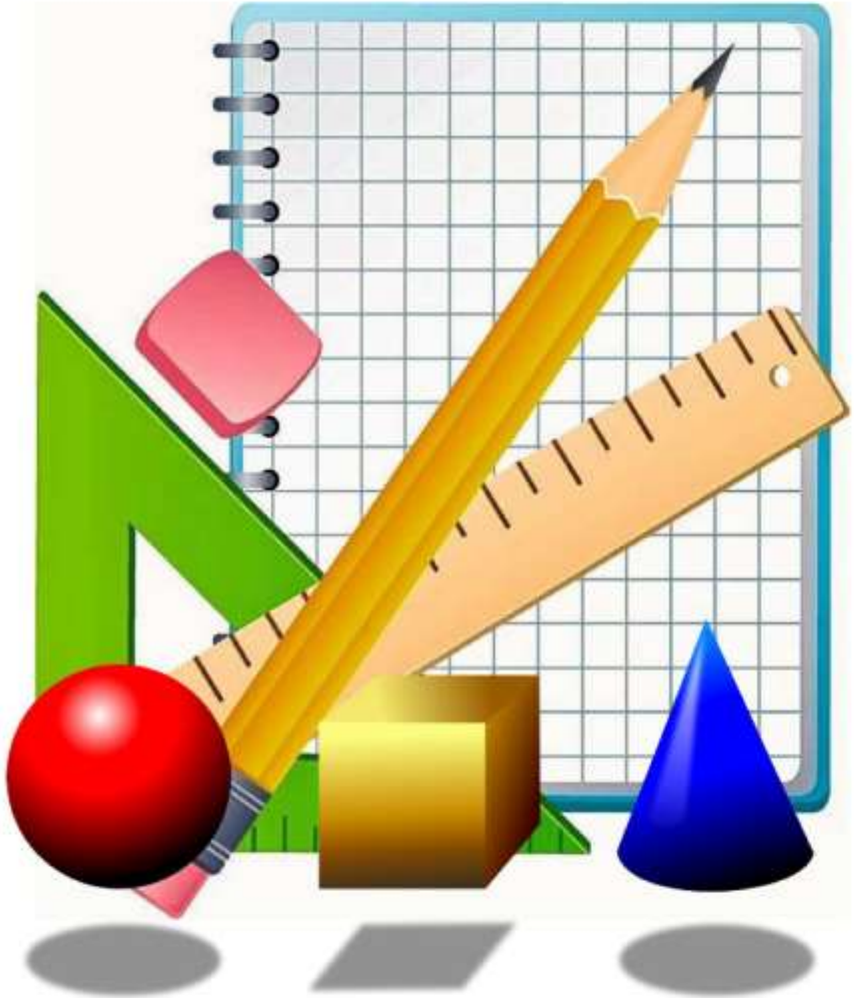
Интенсив «Решение заданий
повышенного и высокого уровня сложности»



Выполнение заданий с кратким ответом. Специальный приём отбора корней квадратного уравнения

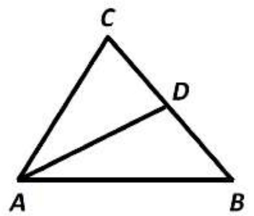
Панина Н. А.
учитель математики
МБОУ СШ № 33,
г. Смоленск

2025-2026 учебный год

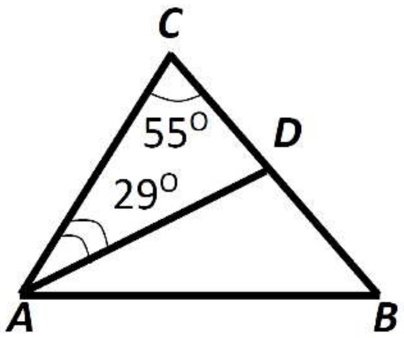
Задания с кратким ответом

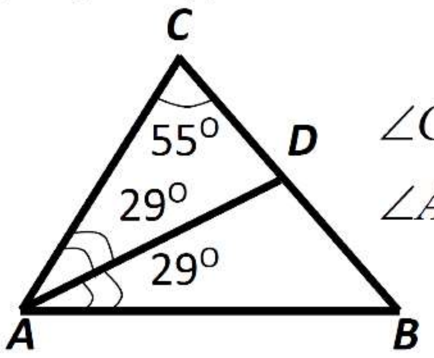
Номер задания	Уровень сложности	Количество первичных баллов	Примерное время выполнения для результата до 60 тестовых баллов	Примерное время выполнения для результата от 61 до 80 баллов	Примерное время выполнения для результата от 81 до 100 баллов	Оптимальный приём выполнения
1	базовый	1	5 минут	3 минуты	2 минуты	Решение по готовому чертежу
2	базовый	1	5 минут	3 минуты	2 минуты	Аналитическое решение
3	базовый	1	8 минут	3 минуты	3 минуты	Метод сопоставления
4	базовый	1	5 минут	2 минуты	1 минута	Классическая вероятность
5	повышенный	1	15 минут	7 минут	3 минуты	Моделирование событий и применение теорем ТВ
6	базовый	1	5 минут	2 минуты	2 минуты	Аналитическое решение
7	базовый	1	7 минут	3 минуты	2 минуты	Аналитическое решение
8	базовый	1	10 минут	5 минут	1 минута	1) Ответить на вопрос: «Чей график я читаю?» 2) Выбрать технику решения (она зависит от ответа на первый вопрос)
9	повышенный	1	15 минут	5 минут	3 минуты	Аналитическое решение
10	повышенный	1	20 минут	6 минут	5 минут	Учитывать смысловые характеристики при работе с моделью
11	повышенный	1	25 минут	8 минут	5 минут	Чтение графика, аналитическое решение
12	повышенный	1	20 минут	8 минут	5 минут	Аналитическое решение
	ИТОГО	**12**	**140 минут**	**55 минут**	**34 минуты**	**70 тестовых баллов**

Задание 1. В треугольнике *ABC* угол *C* равен 55°. *AD* – биссектриса. Угол *CAD* равен 29°. Найдите величину угла *ABD*. Ответ дайте в градусах.



Решение (по готовому чертежу)





$$\angle CAB = 58^\circ$$

$$\angle ABD = \angle ABC = 180^\circ - (55^\circ + 58^\circ) = 180^\circ - 113^\circ = 67^\circ$$

Ответ: 67

Шаг 1. Наносим *на заданный чертёж* исходные данные.

Шаг 2. В условии задачи находим ключевую фразу и на чертеже фиксируем первое умозаключение.

Шаг 3. Отвечаем на главный вопрос задачи.

PS В заданиях с кратким ответом результат в бланке 1 нужно указать без наименования.

Задание 2. Даны векторы $\vec{a}(7;9)$ и $\vec{b}(8;-6)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Решение. Шаг 1. Анализируем условие. Векторы представлены в кординатной форме. Следовательно, нужно выбрать правило «скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноимённых координат».

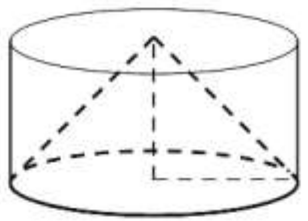
Шаг 2. Отвечаем на главный вопрос задачи:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=7\cdot 8+9\cdot\left(-6\right)=56-54=2.$$

Ответ: 2

Совет: все промежуточные записи фиксировать (не пропускать), но выполнять в очень быстром темпе. *Зрительный контроль записи даже на подсознательном уровне предупреждает вычислительные ошибки.*

Задание 3. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $3\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.



Решение (методом сопоставления)

Шаг 1. Сопоставляем характеристики (боковые поверхности) тел вращения. Боковая поверхность конуса меньше, чем боковая поверхность цилиндра. Боковая поверхность цилиндра $3\sqrt{2}=\sqrt{9\cdot 2}=\sqrt{18}<\sqrt{18,49}=4,3.$

Боковая поверхность конуса меньше, чем 4,3.

Шаг 2. Сопоставляем формулы боковых поверхностей тел:

$$S_{\substack{бок.\\ цилиндра}}=2\pi Rh=2\pi R^2; \qquad S_{\substack{бок.\\ конуса}}=\pi Rl=\pi R\sqrt{R^2+R^2}=\underbrace{\pi R^2\sqrt{2}=\frac{2\pi R^2}{\sqrt{2}}}_{\text{моделируем выражение } S_{\substack{бок.\\ цилиндра}}}=\frac{S_{\substack{бок.\\ цилиндра}}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=3<4,3.$$

Ответ: 3

PS ***Если есть возможность, то ответ проверяем на правдоподобность.*** В данном случае это сделали методом оценки (прикидки) результата в шаге 1.

Задание 4. На чемпионате по прыжкам в воду выступают 60 спортсменов, среди них 19 спортсменов из Голландии и 24 спортсмена из Дании. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятость того, что четвёртым будет выступать спортсмен из Дании. (2025 год)

Задание 4. В группе туристов 20 человек. С помощью жребия они выбирают семь человек, которые должны идти в село за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин? (2024 год)

Рассмотрим задачу 2024 года в общем виде. В группе туристов a человек. С помощью жребия они выбирают k человек, которые должны идти в село за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

Классическое решение задачи: общее число исходов выбора группы из k человек:

$n = C_a^k$,

число благоприятных исходов (в село идёт турист Д. и с ним ещё (k – 1) человек, которых нужно выбрать из (a – 1) человек): $m=C_{a-1}^{k-1}$.

Вероятность того, что турист Д. пойдёт в магазин, равна

$$p=\frac{m}{n}=\frac{C_{a-1}^{k-1}}{C_a^k}=\frac{\dfrac{(a-1)!}{(k-1)!\cdot(a-1-k+1)!}}{\dfrac{a!}{k!\cdot(a-k)!}}=\frac{\cancel{(a-1)!}\cdot\overset{k}{\cancel{k!}}\cdot\cancel{(a-k)!}}{\cancel{(k-1)!}\cdot\cancel{(a-k)!}\cdot\underset{a}{\cancel{a!}}}=\frac{k}{a}.$$

Решение в общем виде показывает, что подобную задачу можно решать формально, и при этом значительно сократятся затраты времени и трудозатраты: *вероятность того, что один человек войдёт в состав выборки, равна отношению количества выбираемых человек к общему количеству человек в группе*.

Решение задачи из ЕГЭ-2024: $p=\frac{7}{20}=0,35.$

Ответ: 0,35

PS Обратите внимание на то, что в условиях экзаменационных задач ***числовые данные могут быть представлены не арабской символикой, а словом.***

Задание 5. Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,7. Найдте вероятность того, что стрелок попадёт в первую мишень и не попадёт в три последние. (2024 год)

Задание 5. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Верятность того, что к концу дня в первом автомате закончится кофе, равна 0,2. Вероятность того, что кофе закончится во втором автомате, такая же. Вероятность того, что кофе закончится в двух автоматах, равна 0,18. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в двух автоматах. (2025 год)

Решение (моделирование событий и применение теорем ТВ)

2024 год. Вводим легенду: П – попал в мишень, Н – не попал. На языке легенды описываем событие: ПННН и, применяя теорему умножения, находим вероятность:

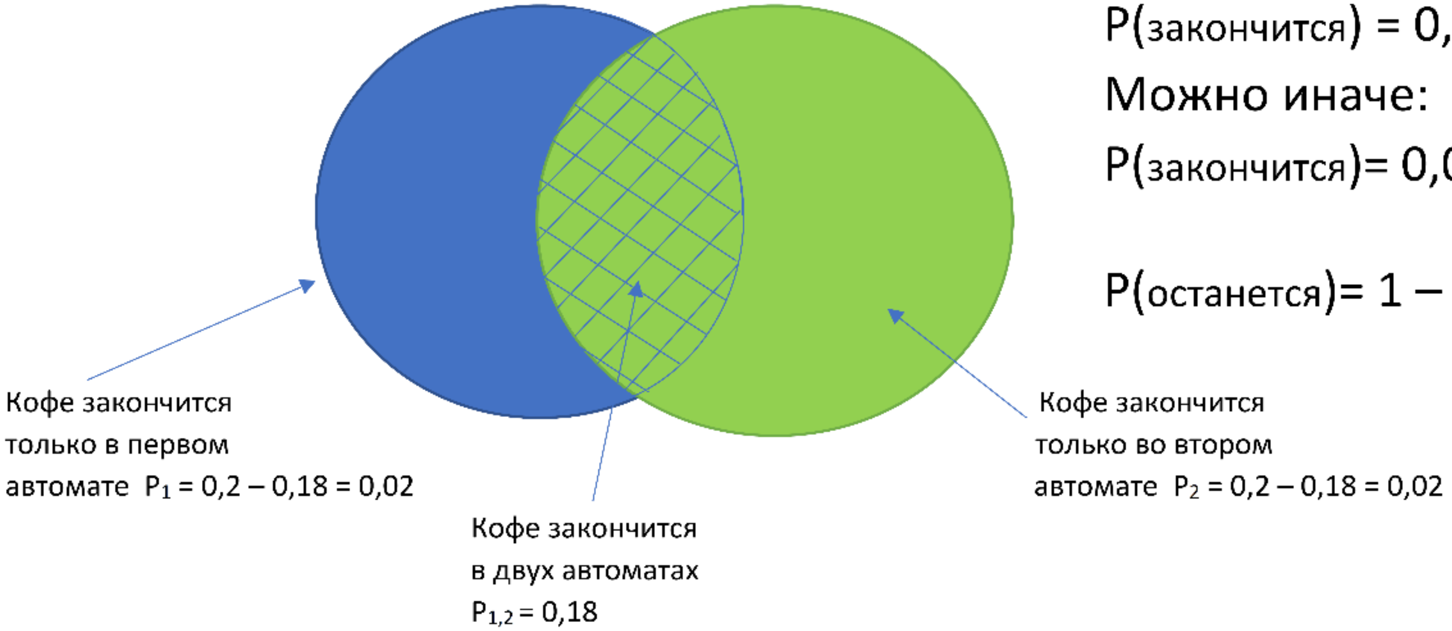
$$P(\text{ПННН}) = 0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 0,0189$$

Ответ: 0,0189.

2025 год. Шаг 1. Анализируем условие. Ключевая фраза «вероятность того, что кофе *закончится* в двух автоматах, равна 0,18». Понимаем, что речь идёт о совместных событиях. Следовательно, модель задачи – круги Эйлера.

Шаг 2. Иллюстрируем условие задачи с помощью кругов Эйлера и ведём расчёт вероятности события «кофе закончится или только в одном первом автомате, или только в одном втором автомате, или закончится в двух автоматах сразу».

Шаг 3. Переходим к противоположному событию «кофе нигде не закончится, то есть *останется* в двух автоматах».



P(закончится) = 0,2 + 0,2 – 0,18 = 0,22.

Можно иначе:

P(закончится)= 0,02 + 0,02 + 0,18 = 0,22.

P(останется)= 1 – 0,22 = 0,78.

Ответ: 0,78

Задание 6. Решите уравнение

$$\sqrt{63-9x}=3 \qquad (2020\ \text{год}),$$

$$8^{9-x}=64 \qquad (2021\ \text{год}),$$

$$\sqrt{5x+11}=4 \qquad (2022\ \text{год}),$$

$$9^{-2-x}=81 \qquad (2023\ \text{год}),$$

$$\sqrt{44-5x}=3 \qquad (2024\ \text{год}),$$

$$3^{x-5}=\frac{1}{27} \qquad (2025\ \text{год}).$$

В демоверсии ЕГЭ-2026 представлены уравнения

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{3-x}=81,$$

$$\log_8(5x+47)=3,$$

$$\sqrt{44-5x}=3,$$

$$\sqrt{2x+3}=x.$$

Если корней окажется несколько, то в ответе запишите меньший из них.

Задание. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{26}}{26}$ и $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. (2020 год)

Задание 7. Найдите значение выражения

$$\frac{3\sin 94^\circ}{\sin 47^\circ \cdot \sin 43^\circ} \qquad \text{(2021 год)},$$

$$\frac{3\sin 68^\circ}{\cos 34^\circ \cdot \cos 56^\circ} \qquad \text{(2022 год)},$$

$$\log_2 96 - \log_2 3 \qquad \text{(2023 год)},$$

$$3\sin\frac{13\pi}{12} \cdot \cos\frac{13\pi}{12} \qquad \text{(2024 год)},$$

$$\log_2 6{,}4 + \log_2 5 \qquad \text{(2025 год)}.$$

В демоверсии ЕГЭ-2026 представлены выражения

$$3\sin\frac{13\pi}{12} \cdot \cos\frac{13\pi}{12},$$

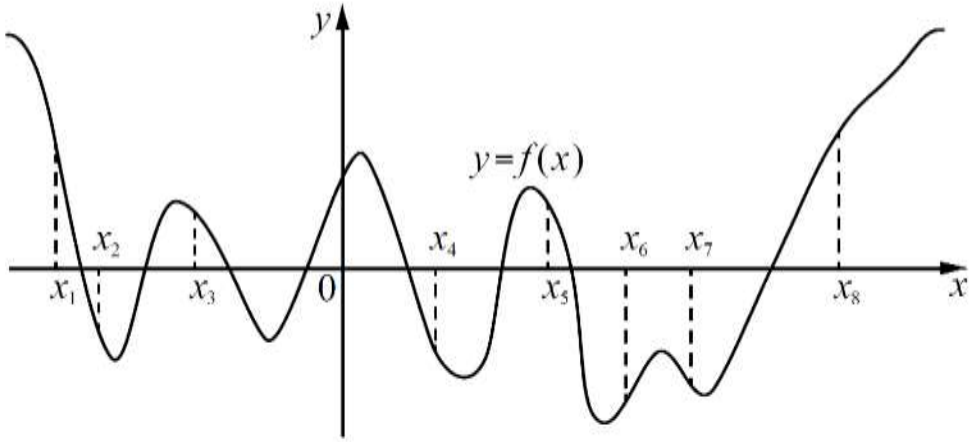
$$\frac{\log_7 32}{\log_7 2},$$

$$25^{2\sqrt{8}+3} \cdot 5^{-3-4\sqrt{8}}.$$

Задание 8. ***Важно осознавать, чей график читаем.***

- ***Если читаем график функции***, то мысленно проводим касательные и исследуем углы их наклона:
  - ✓ В точке x_0 угол наклона острый → $f'(x_0) > 0$.
  - ✓ В точке x_0 угол наклона тупой → $f'(x_0) < 0$.
  - ✓ Касательная параллельна оси Ox или совпадает с ней → $f'(x_0) = 0$.

ЕГЭ-2023. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечено восемь точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. Найдите количество отмеченных точек, в которых производная функции $f(x)$ положительна.

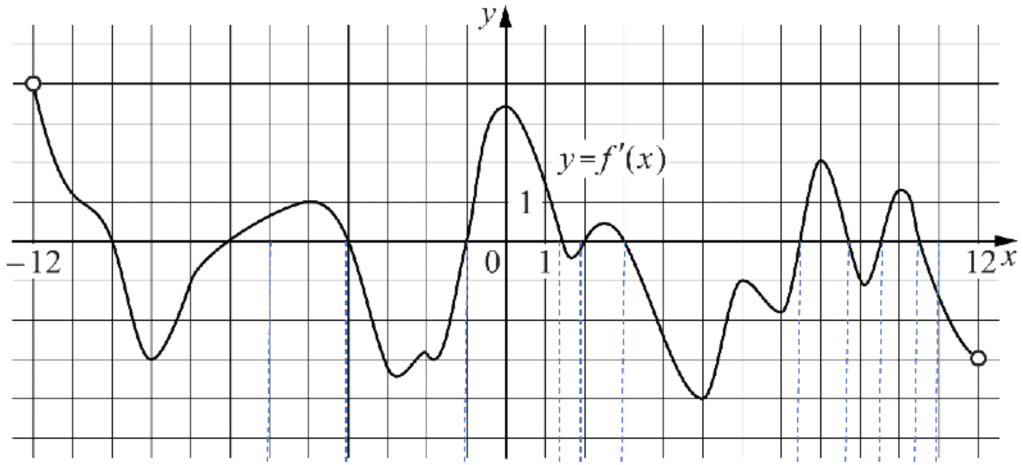


Решение. В каждой указанной точке мысленно проводим касательную. В точках x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7 угол наклона касательной тупой, производная в этих точках отрицательная. В точках x_6 и x_8 угол наклона касательной острый, производная в этих точках положительная.

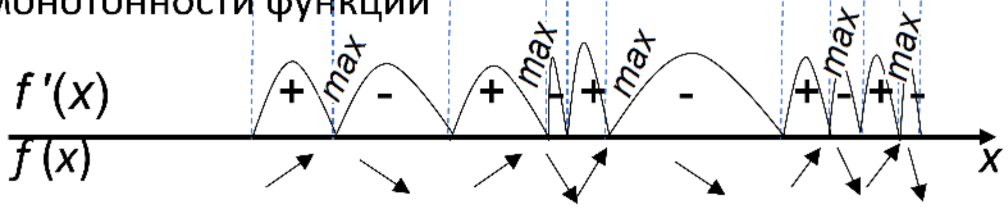
Ответ: 2

- ***Если читаем график производной функции***, то исследуем знак производной в интервале и составляем суждение о монотонности функции:
  - Если на интервале значения производной положительные, то на этом интервале функция возрастает.
  - Если на интервале значения производной отрицательные, то на этом интервале функция убывает.

ЕГЭ-2024. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале (–12; 12). Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку [–6; 11].

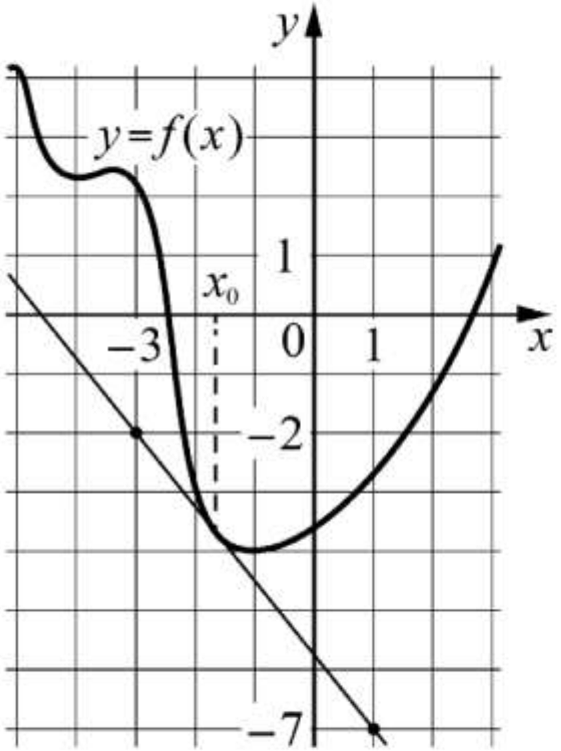


Решение. Выделяем отрезок [–6; 11]. Составляем графическую схему исследования знаков производной и составляем суждения о монотонности функции



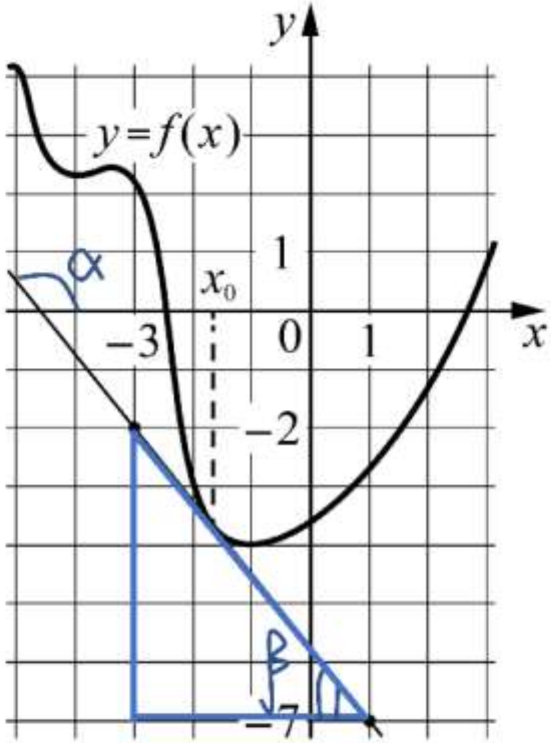
Ответ: 5

- ***Если на чертеже представлен график функции и касательная*** в точке x_0, то опираемся на геометрический смысл производной



ЕГЭ-2025. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

Решение.



$$f'(x_0) = \text{tg}\alpha = \text{tg}(180° - \beta) = -\text{tg}\beta = -\frac{5}{4} = -1,25.$$

Ответ: –1,25

Задание 9. 2024 год

Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 90$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 16$ км/ч^2. Расстояние (в км) от мотоциклиста до города вычисляется по формуле $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, где t — время в часах, прошедшее после выезда из города. Определите время, прошедшее после выезда мотоциклиста из города, если известно, что за это время он удалился от города на 72 км. Ответ дайте в минутах.

Задание 9. 2025 год

Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением $a = 9000$ км/ч^2. Скорость v (в км/ч) вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь (в км). Найдите, сколько километров проедет автомобиль к моменту, когда он разгонится до скорости 120 км/ч.

Особенность выполнения: ***в решении рядом с окончательным результатом нужно указать наименование из формулы*** и проанализировать: «Оно соответствует ответу на главный вопрос задачи?»

Задание 10. 2025 год

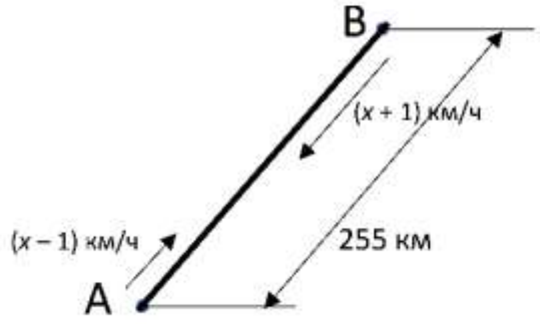
Моторная лодка прошла против течения реки 255 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 1 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Шаг 1. Задачу на движение иллюстрируем и составляем математическую модель по составленной схеме.

Шаг 2. Смысловые характеристики величин присоединяем к модели. Это позволяет сэкономить время решения задачи.

Шаг 3. Работаем с упрощённой моделью, интерпретируем результат.

Шаг 4. Возвращаемся к условию: «Что требуется найти в задаче? В каких единицах измерения требуется дать ответ?» и отвечаем на главный вопрос задачи.



$\frac{255}{x-1}-\frac{255}{x+1}=2.$ По смыслу задачи $x-1>0$, $x+1>0$, тогда

$255(x+1)-255(x-1)=2(x^2-1)$,

$255x+255-255x+255=2(x^2-1)$,

$2\cdot 255=2(x^2-1)$, $x^2=256$, $x=16$, так как $x-1>0$.

16 км/ч – скорость лодки в неподвижной воде.

Ответ: 16

✓ **Первая особенность решения текстовой задачи:** дробно-рациональное уравнение решаем не по алгоритму, а присоединяем смысловые оценки к математической модели, получаем модель с ограничениями.

✓ **Вторая особенность:** дискриминант квадратного уравнения не вычисляем, а раскладываем на множители, из которых легко извлекаются квадратные корни.

Оба приёма позволяют значительно сократить затраты времени и трудозатраты.

ЕГЭ-2023. Первая труба пропускает на 4 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 672 литра она заполняет на 4 минуты быстрее, чем первая труба?

Решение.

	Производительность труда (л/мин.)	Время, мин.	Объём работы, л
1-я труба	$x-4$	$\frac{672}{x-4}$	672
2-я труба	x	$\frac{672}{x}$	672

$$\frac{672}{x-4}-\frac{672}{x}=4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{168}{x-4}-\frac{168}{x}=1.$$

По смыслу задачи $x-4>0$, $x>0$, тогда $168x-168(x-4)=x^2-4x$.

$$x^2-4x-4\cdot 168=0, \qquad D=4\cdot 4+4\cdot 4\cdot 168=16\cdot(1+168)=16\cdot 169=4^2\cdot 13^2=52^2,$$

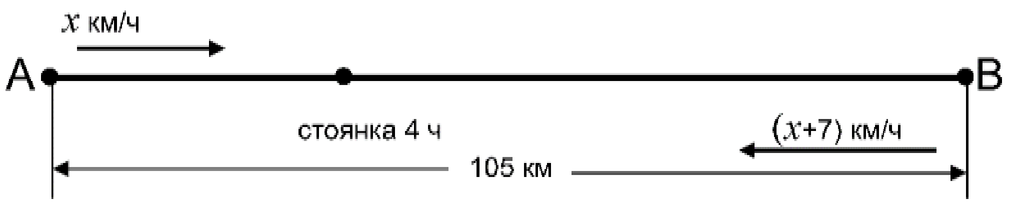
$$x_{1,2}=\frac{4\pm 52}{2}=2\pm 26.$$

Так как $x-4>0$, то $x=28$. Вторая труба пропускает 28 литров воды в минуту.

Ответ: 28

Задача. Велосипедист выехал из города *A* в город *B*, расстояние между которыми равно 105 км. Его скорость была постоянной на протяжении всего пути. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 7 км/ч больше прежней. В пути он сделал остановку, которая составила 4 часа. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь от *A* до *B*. Найдите скорость велосипедиста на пути из *B* в *A*. Ответ дайте в километрах в час.

Решение.



$$\begin{cases} \dfrac{105}{x} = \dfrac{105}{x+7} + 4, \\ x > 0, \\ x + 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 105(x+7) = 105x + 4x(x+7), \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 105x + 105 \cdot 7 = 105x + 4x^2 + 28x, \\ x > 0 \end{cases}$$

$$4x^2 + 28x - 105 \cdot 7 = 0,$$

$$D = 4 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 7 + 4 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 15 \cdot 7 = 28^2 \cdot (1 + 15) = 28^2 \cdot 4^2 = 112^2,$$

$$x_1 = \frac{-28 - 112}{8} < 0, \text{ не подходит}; \qquad x_2 = \frac{-28 + 112}{8} = \frac{84}{8} = 10{,}5.$$

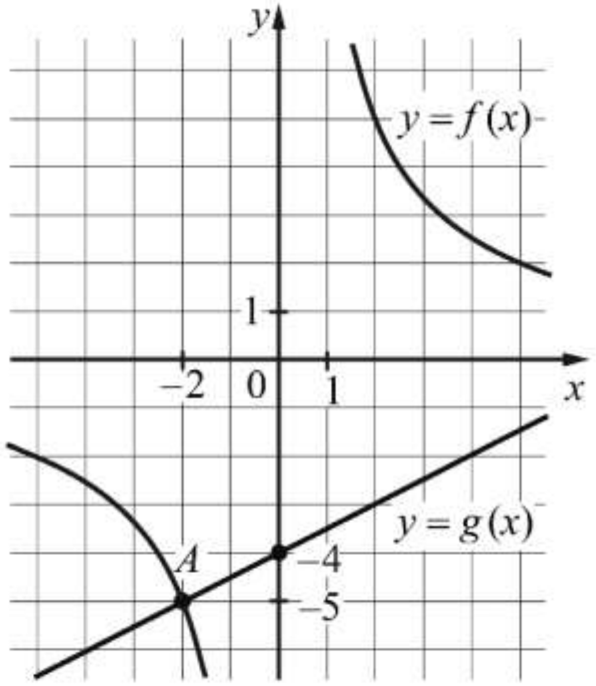
10,5 км/ч – скорость велосипедиста на пути из *A* в *B*.

10,5 + 7 = 17,5 (км/ч) – скорость на пути из *B* в *A*.

Ответ: 17,5

Задание 11 (2025 год).

На рисунке изображены графики функций $f(x)=\dfrac{k}{x}$ и $g(x)=ax+b$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Решение. Шаг 1. Выполняем прикидку результата.

В данном случае: абсцисса точки *B* больше 8 (заключаем, исследуя графики: графики пересекутся в первой четверти, а прямая пересекает ось *Ox* в точке с абсциссой 8, то есть для части прямой, расположенной в первой четверти, характерно то, что $x > 8$).

Шаг 2. Конкретизируем формулы. Для гиперболы это можно сделать с помощью точки A(–2; –5). Уравнение прямой можно прочитать, используя геометрический смысл параметров. Получим: $f(x)=\dfrac{10}{x}$, $g(x)=\dfrac{x}{2}-4$.

Шаг 3. Составляем модель «графики пересекаются», находим абсциссы точек пересечения. Проверяем достоверность результатов: действительно меньшая абсцисса равна –2, а бóльшая больше 8?

Шаг 4. Читаем задание. Отвечаем на главный вопрос.

Задание 12. *Проверяется умение оперировать понятиями: экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; умение находить производные элементарных функций; умение использовать производную для исследования функций, находить наибольшие и наименьшие значения функций*

Задания демоверсии 2026

- Найдите точку максимума функции $y = 9 \cdot \ln(x-4) - 9x - 7$.
- Найдите точку максимума функции $y = (x+8)^2 \cdot e^{3-x}$.
- Найдите точку минимума функции $y = -\dfrac{x}{x^2+256}$.
- Найдите точку максимума функции $y = x^3 + 27x^2 + 11$.

ЕГЭ-2023 Найдите точку минимума функции $y = x\sqrt{x} - 3x + 17$.

В демонстрационном варианте представлены конкретные примеры заданий, не исчерпывающие всего многообразия возможных формулировок заданий на каждой позиции варианта экзаменационной работы.

Советы:

1. Полученный в задании ответ обязательно сопоставить с текстом задачи: «Что требовалось найти? В каких единицах следует указать ответ?»

2. Полученный в задании ответ нужно проверить на достоверность: «Правдоподобен ли ответ? Не противоречит ли он условию задачи, жизненному опыту?»

3. Если все задания с кратким ответом выполнялись по порядку, без нарушений очерёдности, то не имеет значения, когда заполнять бланк ответов компьютерной проверки – сразу после выполнения задания и проверки ответа на правдоподобие или после решения всех задач первой части.

4. Если какое-то задание было пропущено или задания выполнялись не в заданной последовательности, то бланк лучше заполнять сразу после выполнения задания и проверки ответа, чётко осознавая, в строку какого задания следует записать ответ

ЖЕЛАЮ УСПЕХА!

Отбор корней квадратного уравнения на заданном промежутке

Пример 1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых только один корень уравнения $x^2 - ax + 5 = 0$ больше 2, а другой не равен 2.

Решение. По смыслу задачи квадратное уравнение имеет ровно 2 различных действительных корня, тогда $D > 0$, то есть $a^2 - 20 > 0$, причём один корень уравнения больше 2, а другой меньше 2 (следует из смысла задачи).

Рассмотрим функцию $y = x^2 - ax + 5 = 0$ – квадратичная. График – парабола, ветви направлены вверх. Рассмотрим все случаи расположения параболы и проанализируем знак функции в точке 2.

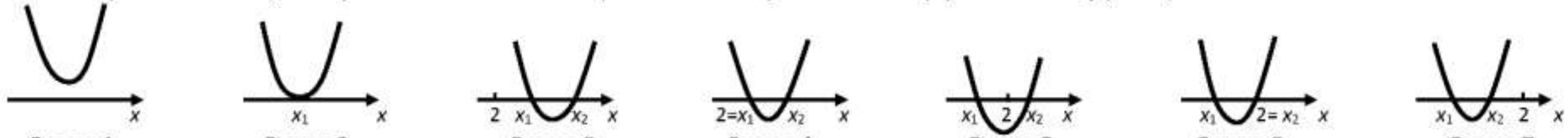


Схема 1	Схема 2	Схема 3	Схема 4	Схема 5	Схема 6	Схема 7
$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$	$D > 0$	$D > 0$	$D > 0$	$D > 0$
$y(2) > 0$	$y(2) \geq 0$	$y(2) > 0$	$y(2) = 0$	$y(2) < 0$	$y(2) = 0$	$y(2) > 0$

Графическим методом доказали, что один корень квадратного уравнения больше 2, а другой меньше 2, тогда и только тогда, когда $y(2) < 0$, то есть $4 - 2a + 5 < 0 \Leftrightarrow a > 4,5.$

Ответ: $a \in (4,5; +\infty)$.

Пример 2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых только один корень уравнения $-x^2 + 4x - a = 0$ меньше 4.

Решение. Рассмотрим функцию $y = -x^2 + 4x - a = 0$ – квадратичная. График – парабола, ветви направлены вниз. Рассмотрим все случаи расположения параболы и проанализируем знак функции в точке 4.

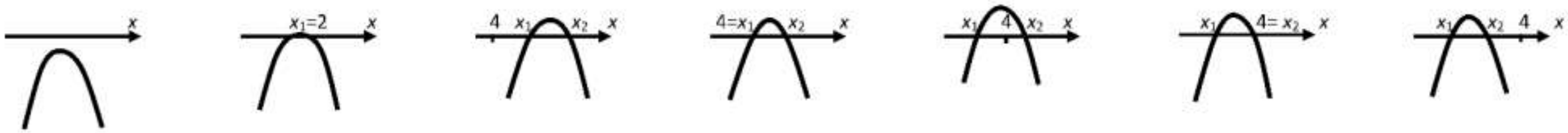


Схема 1	Схема 2	Схема 3	Схема 4	Схема 5	Схема 6	Схема 7
$D<0$	$D=0$	$D>0$	$D>0$	$D>0$	$D>0$	$D>0$
$y(4)<0$	$y(4)<0$	$y(4)<0$	$y(4)=0$	$y(4)>0$	$y(4)=0$	$y(4)<0$

Только один корень уравнения меньше 4 только на схемах 2, 5 и 6. Рассмотрим эти случаи.

Случай 1 (схема 2). Уравнение имеет ровно один корень, и этот корень меньше 4. Тогда

$$\begin{cases} D=0, \\ x_1=\dfrac{-4}{-2}, \\ x_1<4. \end{cases}$$ Система равносильна уравнению $D = 0$, то есть $16 - 4a = 0$, следовательно, $a = 4$.

Случай 2 (схема 5). Один корень меньше 4, а другой больше 4. Тогда и только тогда $y(4)>0$. Модель этого случая: $y(4)>0$, то есть $-16+16-a>0 \quad \Leftrightarrow \quad a<0$.

Случай 3 (схема 6). Один из корней меньше 4, а другой равен 4. Так как сумма корней уравнения равна 4 (по теореме Виета), один из корней равен 4, то другой корень равен 0 (и он меньше 4). Замечаем, что ситуация, изображённая на схеме 4, невозможна в рамках решаемой задачи, и модель схемы 6 (а именно: $y(4)=0$) является достаточной.

$y(4)=0$, то есть $-16+16-a=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=0.$

Ответ: $a\in(-\infty;0]\cup\{4\}$.

PS Для того, чтобы установить, что условие является достаточным нужно рассмотреть ВСЕ случаи расположения параболы.

Пример 3. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых один корень уравнения $x^2 - 4x + a = 0$ меньше 2, а другой больше 4.

Решение. Рассмотрим функцию $y = x^2 - 4x + a = 0$ – квадратичная. График – парабола, ветви направлены вверх.

Более эффективным (значительно уменьшаются затраты времени и трудозатраты) оказывается решение по действиям:

в первом действии установим условие выполнения требования «только один корень меньше 2»,

во втором действии установим условие выполнения требования «только один корень больше 4»,

в третьем действии обеспечим одновременность выполнения первого и второго условий.

1) Заметим, что сумма корней квадратного уравнения равна 4 (по теореме Виета). Если один из корней будет равен 2, то и другой будет равен 2. Учтём это, рассматривая все случаи расположения параболы. Проанализируем знак функции в точке 2.

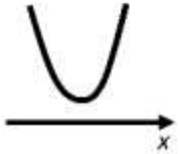


Схема 1

$D < 0$

$y(2) > 0$

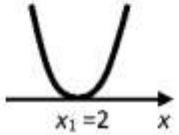


Схема 2

$D = 0$

$y(2) = 0$

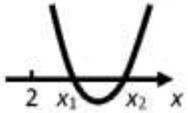


Схема 3

$D > 0$

$y(2) > 0$

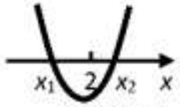


Схема 4

$D > 0$

$y(2) < 0$

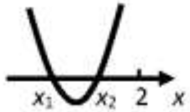


Схема 5

$D > 0$

$y(2) > 0$

Доказали, что только один корень квадратного уравнения меньше 2 тогда и только тогда, когда $y(2) < 0$.

2) Заметим, что если один из корней равен 4, то другой корень равен 0, так как сумма корней равна 4 (по теореме Виета). Следовательно, 4 может оказаться только бо́льшим корнем уравнения. Учитывая это, рассмотрим все случаи расположения параболы и проанализируем знак функции в точке 4.

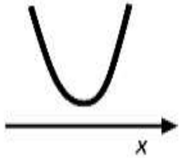


Схема 1
$D < 0$
$y(4) > 0$

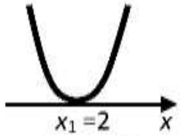


Схема 2
$D = 0$
$y(4) > 0$

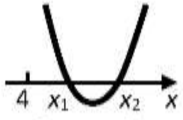


Схема 3
$D > 0$
$y(4) > 0$

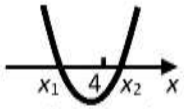


Схема 4
$D > 0$
$y(4) < 0$

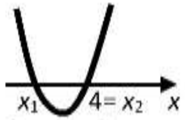


Схема 5
$D > 0$
$y(4) = 0$

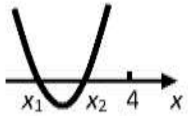


Схема 6
$D > 0$
$y(4) > 0$

Доказали, что только один корень квадратного уравнения больше 4 тогда и только тогда, когда $y(4) < 0$.

3) Таким образом, один корень уравнения $x^2 - 4x + a = 0$ меньше 2, а другой больше 4 тогда и только тогда, когда одновременно выполняются условия $y(2) < 0$, $y(4) < 0$.

$\begin{cases} y(2) < 0, \\ y(4) < 0. \end{cases}$ Следовательно, $\begin{cases} 4 - 8 + a < 0, \\ 16 - 16 + a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 4, \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a < 0.$

Ответ: $a \in (-\infty; 0)$.

PS Используя решение примера 3, замечаем, что модель задачи «Найдите все значения параметра a, при каждом из которых корни уравнения $x^2 - 4x + a = 0$ принадлежат интервалу (2; 4)» *не может быть создана таким же способом*. Причина: больше 2 оба корня и меньше 4 оба корня. Условию «оба корня больше 2» соответствует только схема 3 первого действия, но условия, которыми она характеризуется не являются достаточными (для схемы 5 они такие же). Условию «оба корня меньше 4» соответствует только схема 6 второго действия, но условия, которыми она характеризуется не являются достаточными (для схемы 3 они такие же). Сформулированная задача решается иначе. *Исследование нужно дополнить исследованием расположения вершины параболы*.

Пример 4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых корни уравнения $x^2 - ax + 4 = 0$ принадлежат интервалу (–1; 4).

Решение. 1) Установим условие выполнения требования «оба корня уравнения больше –1». Рассмотрим все случаи расположения параболы. Проанализируем знак функции в точке –1.

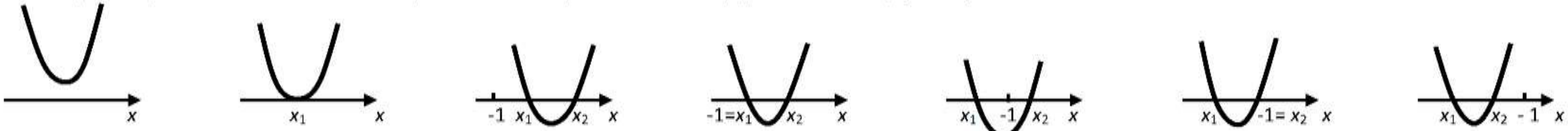


Схема 1	Схема 2	Схема 3	Схема 4	Схема 5	Схема 6	Схема 7
$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$	$D > 0$	$D > 0$	$D > 0$	$D > 0$
$y(-1) > 0$	$y(-1) \geq 0$	$y(-1) > 0$	$y(-1) = 0$	$y(-1) < 0$	$y(-1) = 0$	$y(-1) > 0$

Оба корня больше –1 только на схеме 3. Условие $y(-1) > 0$ не является достаточным (для схем 1 и 7 видим то же самое). Отличие описания схемы 3 от схемы 1 – требование «D > 0», его добавляем к установленному ранее $y(-1) > 0$. Но получающаяся модель совпадает с моделью схемы 7. Следовательно, модель « $D > 0$ и $y(-1) > 0$ » отражает только необходимое, но не достаточное условие.

2) Установим условие выполнения требования «оба корня уравнения меньше 4». Рассмотрим все случаи расположения параболы и проанализируем знак функции в точке 4.

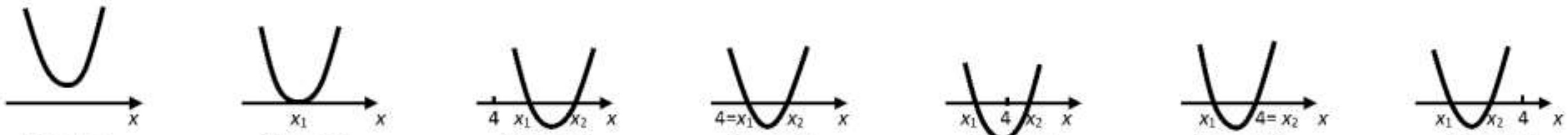


Схема 1	Схема 2	Схема 3	Схема 4	Схема 5	Схема 6	Схема 7
$D<0$	$D=0$	$D>0$	$D>0$	$D>0$	$D>0$	$D>0$
$y(4)>0$	$y(4)\geq 0$	$y(4)>0$	$y(4)=0$	$y(4)<0$	$y(4)=0$	$y(4)>0$

Оба корня меньше 4 только на схеме 7. Условие $y(4)>0$ не является достаточным (для схем 1 и 3 видим то же самое). Отличие описания схемы 7 от схемы 1 – требование «$D > 0$», его добавляем к установленному ранее $y(4)>0$. Но получающаяся модель совпадает с моделью схемы 3. Следовательно, модель «$D>0$ и $y(4)>0$» отражает только необходимое, но не достаточное условие.

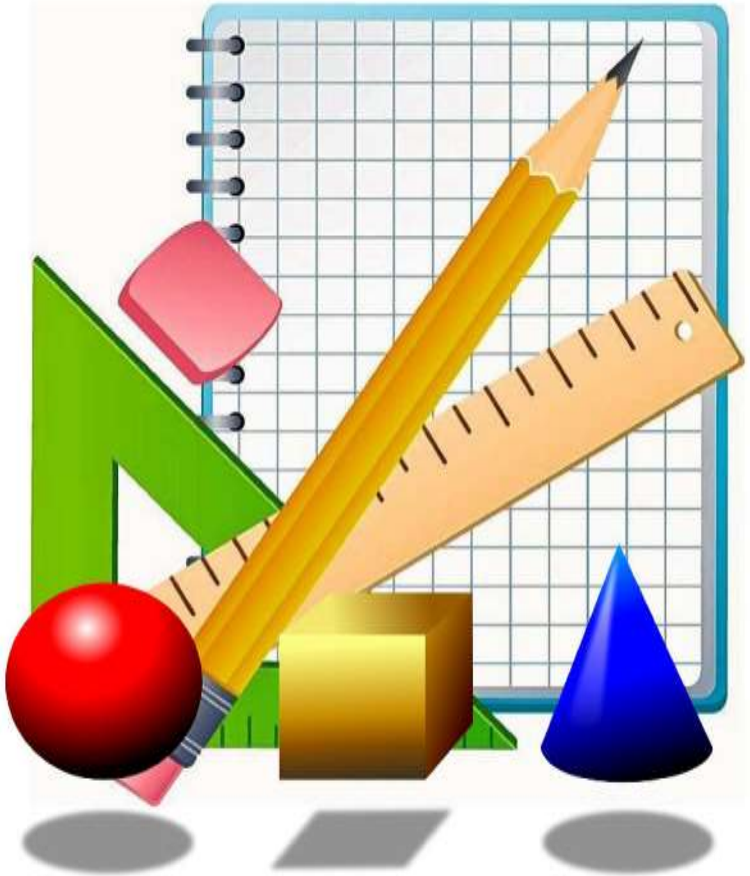
3) Учтём, что абсцисса вершины параболы является серединой промежутка $[x_1; x_2]$, где x_1 – меньший корень уравнения, x_2 – больший корень. Так как $-1 < x_1 < 4$ и $-1 < x_2 < 4$, то $-1 < x_в < 4$ (по свойству транзитивности), где $x_в$ – абсцисса вершины параболы.

На схеме 7 первого действия условие $-1 < x_в < 4$ не выполняется. На схеме 3 второго действия условие $-1 < x_в < 4$ не выполняется. Следовательно, присоединение требования $-1 < x_в < 4$ к окончательным требованиям первого и второго действий позволяет создать модель, отражающую необходимое и достаточное условие того, что корни уравнения будут принадлежать интервалу $(-1; 4)$.

4) В итоге получаем

$$\begin{cases} D>0, \\ y(-1)>0, \\ y(4)>0, \\ -1<x_в<4, \end{cases} \text{ то есть } \begin{cases} a^2-16>0, \\ 1+a+4>0, \\ 16-4a+4>0, \\ -1<\dfrac{a}{2}<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a<-4, \\ a>4 \end{array}\right. \\ a>-5, \\ a<5, \\ -2<a<8 \end{cases} \Leftrightarrow 4<a<5.$$

Ответ: $a\in(4;5)$.



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

ПАНИНА Н. А.

09.10.2025 состоится занятие «Решение тригонометрических уравнений. Отбор корней»