



# Преподавание теории вероятности и статистики в старшей школе.

**Учитель математики МБОУ «Барановская СОШ»  
Сафоновского района, руководитель РМО учителей  
математики Сафоновского района:  
Егорова Елена Ивановна.**



Высшее назначение математики...  
состоит в том, чтобы находить скрытый  
порядок в хаосе, который нас окружает.  
Норберт Винер





## РИСКИ ВВЕДЕНИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО УЧЕБНОГО КУРСА «ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА»



Отсутствует  
традиция  
преподавания  
данного курса

Педагоги не владеют  
свободно  
содержанием  
учебного курса  
«Вероятность и  
статистика»

Недостаточно  
методических  
пособий  
в помощь  
учителю



# На уровне СОО

## базовый уровень

## углубленный уровень

### 10 класс:

Представление данных и описательная статистика  
Случайные опыты и случайные события, опыты с равновероятными элементарными исходами  
Операции над событиями, сложение вероятностей  
Условная вероятность, дерево случайного опыта, формула полной вероятности и независимость событий  
Элементы комбинаторики  
Серии последовательных испытаний  
Случайные величины и распределения

### 11 класс:

Математическое ожидание случайной величины  
Дисперсия и стандартное отклонение случайной величины  
Закон больших чисел  
Непрерывные случайные величины (распределения)  
Нормальное распределения

### 10 класс

Элементы теории графов  
Испытания Бернулли  
Случайный выбор из конечной совокупности  
Математическое ожидание бинарной величины  
Дисперсия бинарной величин

### 11 класс:

Неравенство Чебышёва  
Теорема Бернулли  
Функция плотности вероятности  
Распределение Пуассона  
Ковариация двух случайных величин  
Линейная регрессия

добавлены разделы,  
темы

+

добавлены разделы,  
темы

+



## **И.Р.Высоцкий, И.В.Яценко** **«Типичные ошибки в преподавании теории вероятностей и статистики»**

Цель статьи – помочь учителю сориентироваться в содержании и преподавании теории вероятностей и статистики основной и старшей школы на основе анализа типичных методических ошибок. Используются материалы уроков, методических статей и руководств, а также опыт работы курсов повышения квалификации учителей, проводимых в МЦНМО и МИОО с 2005 года.

[Статья](#)



# Ю.Н.Тюрин, А.А.Макаров, И.Р.Высоцкий, И.В.Ященко «Теория вероятностей и статистика»

Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров, И. Р. Высоцкий, И. В. Ященко

## ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКА

Экспериментальное учебное пособие для 10 и 11 классов  
общеобразовательных учреждений

Учебное пособие

Москва  
Издательство МЦНМО  
2014



## Оглавление

<b>От авторов</b>	<b>3</b>
<b>Глава I. Случайные события и вероятность (повторение основных понятий)</b>	<b>6</b>
§ 1. Случайные эксперименты и случайные события	6
§ 2. Вероятности событий	14
§ 3. Близость частоты и вероятности	24
<b>Глава II. Математическое описание событий</b>	<b>28</b>
§ 4. Операции с событиями	28
§ 5. Формула сложения вероятностей	37
<b>Глава III. Условная вероятность</b>	<b>50</b>
§ 6. Условная вероятность	50
<b>Глава IV. Случайные величины и распределения</b>	<b>71</b>
§ 7. Случайные величины	71
§ 8. Распределение вероятностей	77
§ 9. Характеристики случайных величин	84
<b>Глава V. Несколько случайных величин</b>	<b>97</b>
§ 10. Совместные распределения	97
§ 11. Математическое ожидание и дисперсия суммы случайных величин	102
<b>Глава VI. Независимые случайные величины</b>	<b>111</b>
§ 12. Независимость случайных величин	111
<b>Глава VII. Геометрическое распределение</b>	<b>119</b>
§ 13. Число испытаний до первого успеха	119
<b>Глава VIII. Комбинаторика</b>	<b>124</b>
§ 14. Основные сведения	124
§ 15. Число перестановок. Факториал	131
§ 16. Число сочетаний $C_n^k$	133

## Оглавление

<b>Глава IX. Испытания Бернулли и биномиальное распределение</b>	<b>141</b>
§ 17. Испытания Бернулли	141
§ 18. Случайная величина «число успехов»	143
§ 19. Математическое ожидание и дисперсия числа успехов	148
<b>Глава X. Закон больших чисел</b>	<b>152</b>
§ 20. Неравенство Чебышёва	152
§ 21. Теорема Чебышёва	154
§ 22. Теорема Бернулли	156
§ 23. Выборочный метод	157
<b>Глава XI. Непрерывные случайные величины</b>	<b>160</b>
§ 24. Понятие непрерывной случайной величины	160
§ 25. Равномерное распределение	163
<b>Глава XII. Нормальное распределение</b>	<b>166</b>
§ 26. Понятие о нормальном распределении	166
<b>Глава XIII. Показательное распределение</b>	<b>183</b>
§ 27. Время ожидания	183
<b>Глава XIV. Линейная регрессия и выборочный коэффициент корреляции</b>	<b>192</b>
§ 28. Совместные наблюдения двух величин и линейная регрессия	192
§ 29. Выборочный коэффициент корреляции	197
<b>Таблица значений функции <math>y = \Phi(x)</math> стандартного нормального распределения с точностью до 0,0001</b>	<b>200</b>
<b>Словарь терминов</b>	<b>202</b>
<b>Задачи для повторения, для проверочных и самостоятельных работ</b>	<b>213</b>
<b>Ответы</b>	<b>229</b>



### Задачи для повторения, для проверочных и самостоятельных работ

#### К главам I–II

1. Опыт состоит в измерении температуры тела с помощью ртутного медицинского термометра. Определите, какое множество элементарных событий в этом случайном опыте – дискретное или непрерывное.
2. В случайном эксперименте измеряют температуру воздуха в комнате с помощью электронного термометра, который показывает температуру с точностью до десятой доли градуса. Определите, дискретное или непрерывное множество элементарных событий в этом эксперименте.
3. Перед началом соревнований по художественной гимнастике жеребьёвкой определяется порядок выступления спортсменок. Из пятнадцати спортсменок трое представляют Российскую Федерацию. Найдите вероятность того, что начинать соревнования будет спортсменка не из России.
4. Перед началом соревнований по прыжкам на лыжах жеребьёвкой определяется порядок выступления прыгунов. Двое спортсменов представляют Россию, четверо – США, двенадцать из стран Европы и Азии. Найдите вероятность того, что третьим по счёту будет выступать спортсмен из США.
5. В случайном эксперименте 4 раза бросают монету. Выпишите все элементарные события, благоприятствующие событию «орёл выпал ровно два раза».
6. В случайном эксперименте 4 раза бросают монету. Выпишите все элементарные события, благоприятствующие событию «орёл выпал не менее трёх раз».
7. В ящике 5 красных и 4 синих шара. Случайным образом выбирают два шара. Найдите вероятность того, что оба выбранных шара – красные.
8. В коробке 10 лампочек, из них две неисправны. Покупатель выбирает случайным образом две лампочки. Найдите вероятность того, что хотя бы одна из купленных лампочек исправна.
9. Игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность того, что в сумме выпало 8 очков.
10. Игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность того, что хотя бы на одной из костей выпало не меньше чем 5 очков.

213

### Контрольная работа 1

#### Вариант 1

1. Игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность события «сумма выпавших очков равна 5».
2. В светильнике две одинаковые лампочки, работающие независимо друг от друга. Вероятность того, что новая лампочка перегорит в течение месяца, равна 0,06. Найдите вероятность того, что к концу месяца хотя бы одна лампочка будет работать.
3. Дано распределение случайной величины:

$$X \sim \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Найдите:

- а) вероятность события  $X \geq 0,3$ ;
  - б) математическое ожидание этой случайной величины;
  - в) дисперсию этой случайной величины.
4. Дано совместное распределение двух случайных величин:

	Y	-2	0
X	-3	0,3	0,2
	-2	0,18	0,12
	1	0,12	0,08

223

#### Задачи для повторения, для проверочных и самостоятельных работ

- а) Запишите распределение случайной величины  $X$ .
  - б) Проверьте, независимы ли случайные величины  $X$  и  $Y$ .
5. При отправке SMS телефон автоматически предпринимает несколько попыток до тех пор, пока информация не будет передана без искажений. Предположим, что вероятность отправки SMS с одной попытки равна 0,6. Найдите вероятность того, что для отправки SMS потребуется:
- а) две попытки; б) не более трёх попыток.
- 6\*. Игральную кость подбрасывали до тех пор, пока сумма выпавших очков не стала равна 3. Найдите вероятность того, что было сделано 3 броска.

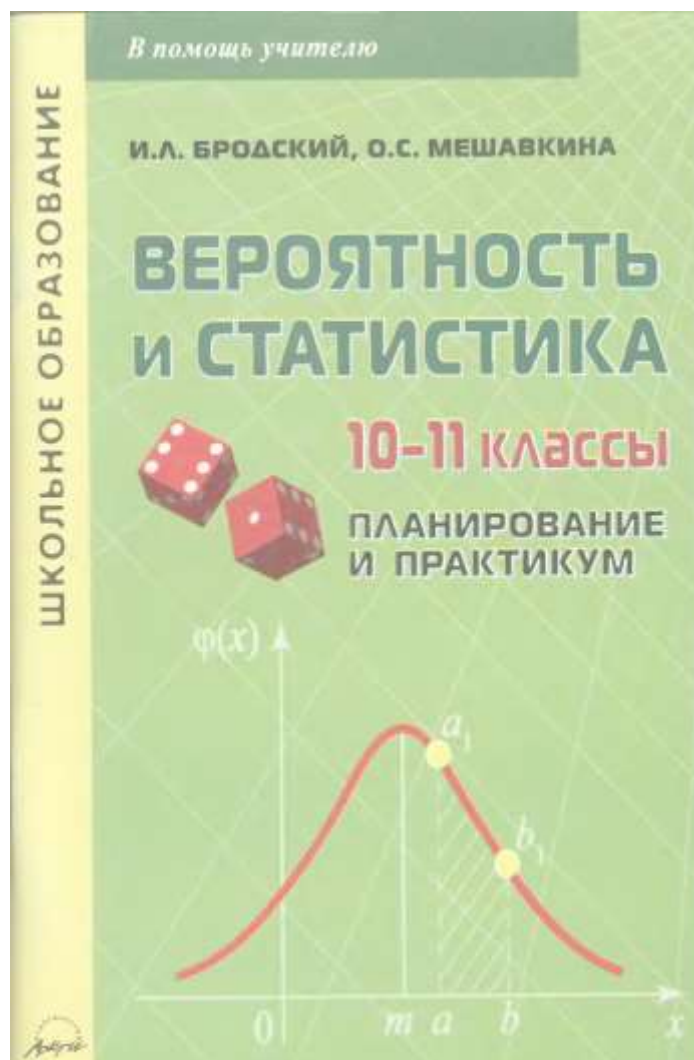
#### Вариант 2

1. Игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность события «сумма выпавших очков равна 7».





# И.Л.Бродский, О.С.Мешавкина «Вероятность и статистика»



[Практикум](#)



### Содержание

Предисловие.....	5
Программа и почасовое планирование раздела «Элементы комбинаторики, теории вероятностей и статистики» (20 часов).....	6
Тема 1. Множества.....	9
УПРАЖНЕНИЯ.....	12
Тема 2. Комбинаторика.....	14
п. 1. Размещения.....	14
УПРАЖНЕНИЯ.....	15
п. 2. Перестановки.....	15
УПРАЖНЕНИЯ.....	16
п. 3. Сочетания.....	16
УПРАЖНЕНИЯ.....	17
Дополнительные упражнения к разделу «Соединения без повторов».....	18
Тема 2.1*. Соединения с повторениями.....	19
п. 1. Размещения с повторениями.....	19
УПРАЖНЕНИЯ.....	19
п. 2. Перестановки с повторениями.....	19
УПРАЖНЕНИЯ.....	20
п. 3. Сочетания с повторениями.....	20
УПРАЖНЕНИЯ.....	21
Дополнительные упражнения к разделу «Соединения с повторениями».....	21
Тема 3. Классическое определение вероятности.....	22
УПРАЖНЕНИЯ.....	24
Тема 4. Геометрическая вероятность.....	26
УПРАЖНЕНИЯ.....	28
Тема 5. Независимые события. Условная вероятность. Теоремы умножения.....	29
УПРАЖНЕНИЯ.....	31
Тема 6. Совместимые события. Теоремы сложения.....	32
УПРАЖНЕНИЯ.....	34
Тема 7. Упражнения на применение теорем сложения и умножения вероятностей.....	35
УПРАЖНЕНИЯ.....	37

Тема 8. Формула полной вероятности.....	37
УПРАЖНЕНИЯ.....	38
Тема 9*. Формула Байеса.....	39
УПРАЖНЕНИЯ.....	40
Тема 10. Формула Бернулли.....	41
УПРАЖНЕНИЯ.....	42
Тема 11*. Закон больших чисел.....	42
УПРАЖНЕНИЯ.....	45
Тема 12. Случайная величина и ее распределение.....	45
УПРАЖНЕНИЯ.....	47
Тема 13. Полигон и гистограмма.....	48
УПРАЖНЕНИЯ.....	51
Тема 14. Статистические характеристики рядов данных. Математическое ожидание случайной величины.....	52
УПРАЖНЕНИЯ.....	53
Тема 15. Отклонение от среднего значения, дисперсия, среднее квадратичное отклонение.....	56
УПРАЖНЕНИЯ.....	58
Тема 16*. Функция распределения плотности вероятности.....	59
Тема 17*. Нормальное распределение. Доверительный интервал.....	61
Ответы и решения упражнений.....	65
Список литературы.....	101



# Е.А.Бунимович, В.А.Булычев «Вероятность и статистика», 10 класс



Учебное пособие



## Оглавление

<b>ГЛАВА 1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДАННЫХ И ОПИСАТЕЛЬНАЯ СТАТИСТИКА</b>	3
§ 1. Представление данных	3
1. Таблицы	3
2. Диаграммы	7
3. Таблица частот и полигон	11
4. Электронные таблицы	21
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1</b>	25
§ 2. Описательная статистика	26
1. Мода	26
2. Среднее арифметическое	27
3. Медиана	28
4. Средние характеристики: как их лучше?	30
5. Среднее гармоническое	33
6. Наибольшее и наименьшее значения. Размах	37
7. Дисперсия и стандартное отклонение	38
8. Формула для вычисления дисперсии*	41
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2</b>	46
<b>ГЛАВА 2 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ*</b>	47
§ 3. Граф и способы его задания	47
1. Определение графа	47
2. Степени вершин	51
3. Пути, цепи и циклы	53
§ 4. Виды графов	57
1. Связные графы	57
2. Деревья	59
3. Дерево случайного эксперимента	61
4. Плоскостные графы	63
5. Теорема Эйлера	65
<b>ГЛАВА 3. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТИ</b>	69
§ 5. Случайные события	69
1. Случайный опыт и случайные события	69
2. Исходы и элементарные события	70
3. Частота и вероятность	72
§ 6. Опыт с равновероятными исходами	76
1. Классическое определение вероятности	76
2. Равновозможные исходы в сложных опытах	78
<b>ГЛАВА 4. СЛОЖЕНИЕ И УМНОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ</b>	84
§ 7. Операции над событиями	84
1. События и множества	84
2. Противоположное событие	86
3. Пересечение событий	88
4. Объединение событий	89
5. События, формулы и диаграммы	90
§ 8. Сложение вероятностей	94
1. Вероятность противоположного события	94

2. Формула суммы для несовместных событий	95
3. Формула суммы для произвольных событий	96
§ 9. Умножение вероятностей	99
1. Условная вероятность	99
2. Вероятность пересечения событий	102
3. Независимые события	104
§ 10. Полная вероятность и формула Байеса	109
1. Дерево вероятностей	109
2. Формула полной вероятности	113
3. Формула Байеса*	116
<b>ГЛАВА 5. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ</b>	121
§ 11. Перестановки и размещения	121
1. Перебор комбинаций	121
2. Правило умножения	122
3. Перестановки и факториал	124
4. Размещения	126
§ 12. Сочетания и их свойства	130
1. Сочетания	130
2. Свойства чисел сочетаний	133
3. Треугольник Паскаля	134
4. Бином Ньютона	136
<b>ГЛАВА 6. ИСПЫТАНИЯ БЕРНУЛЛИ. СЛУЧАЙНЫЙ ВЫБОР</b>	139
§ 13. Независимые испытания	139
1. Успех и неудача	139
2. Формула Бернулли	141
3. Наиболее вероятное число успехов*	143
§ 14. Испытания до первого успеха	147
1. Когда же наступит успех?	147
2. Сколько испытаний провести?	149
3. Испытание Бернулли в электронной таблице	151
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3</b>	153
§ 15. Случайный выбор*	156
1. Случайный выбор без возвращения	156
2. Одновременный случайный выбор	159
3. Случайный выбор с возвращением	161
4. Комбинаторика перестановок	162
<b>ГЛАВА 7. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ</b>	168
§ 16. Понятие случайной величины	168
1. Что такое случайная величина?	168
2. Случайные величины вокруг нас	170
3. Дискретные и непрерывные величины	171
§ 17. Распределение вероятностей	174
1. Закон распределения вероятностей	174
2. Биномиальное распределение	178
3. Геометрическое распределение	181
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4</b>	184



# Е.А.Бунимович, В.А.Булычев «Вероятность и статистика», 11 класс



Учебное пособие



## Оглавление

<b>ГЛАВА 1. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ</b> .....	3
§ 1. Вероятностные неравенства* .....	3
1. Неравенство Маркова .....	3
2. Неравенство Чебышева .....	5
§ 2. Математическое обоснование закона больших чисел .....	7
1. Теорема Бернулли* .....	7
2. Теорема Чебышева* .....	10
3. Закон больших чисел вокруг нас .....	13
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1 .....	16
<b>ГЛАВА 2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ</b> .....	18
§ 3. Выборочный метод исследования .....	18
1. Генеральная совокупность и случайная выборка .....	18
2. Распределение вероятностей и таблицы частот .....	21
3. Выборочное среднее* .....	24
4. Выборочная дисперсия* .....	27
5. Оценка вероятности по выборке* .....	30
6. Выборочные характеристики в электронной таблице .....	34
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2 .....	36
§ 4. Проверка статистических гипотез* .....	38
1. Гипотезы в научных исследованиях .....	38
2. Статистические гипотезы .....	40
3. Гипотеза о математическом ожидании .....	43
4. От чего зависит критическая область? .....	46
5. Гипотеза о вероятности успеха в испытаниях Бернулли .....	47
<b>ГЛАВА 3. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ</b> .....	52
§ 5. Непрерывные случайные величины .....	52
1. Дискретные и непрерывные случайные величины .....	52
2. Функция распределения вероятностей .....	55
3. Свойства функции распределения .....	57
4. Плотность распределения вероятностей .....	59
5. Свойства плотности распределения* .....	60
§ 6. Математическое ожидание и дисперсия* .....	64
1. Математическое ожидание .....	64
2. Дисперсия .....	68
§ 7. Важные распределения .....	70
1. Равномерное распределение .....	70
2. Показательное распределение* .....	73
3. Распределение Пуассона* .....	77
4. Нормальное распределение .....	80
5. Связь биномиального и нормального распределений* .....	84
6. Модеризованное непрерывное случайное величин .....	90
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3* .....	94

<b>ГЛАВА 4. СВЯЗЬ МЕЖДУ СЛУЧАЙНЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ*</b> .....	96
§ 8. Корреляция случайных величин .....	96
1. Совместное распределение случайных величин .....	96
2. Независимые случайные величины .....	100
3. Ковариация случайных величин .....	102
4. Коэффициент корреляции случайных величин .....	106
§ 9. Линейная регрессия .....	110
1. Совместные наблюдения случайных величин .....	110
2. Выборочный коэффициент корреляции .....	113
3. Линейная регрессионная модель .....	117
4. Корреляция и регрессия в электронной таблице .....	121
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4 .....	124
Предметный указатель .....	130
Функции электронных таблиц .....	131
Сравнительные материалы .....	133
Отметы .....	138



## Система подготовки учащихся к итоговой аттестации по данной теме.

В 11 классе государственная итоговая аттестация по математике сдаётся в форме ЕГЭ. На ЕГЭ проверяются знания по всей школьной программе по математике. На едином госэкзамене можно выбрать уровень: базовый или профильный.

Что нужно знать и уметь для того, чтобы сдать базовую математику на ЕГЭ

- Выполнять вычисления и преобразования.
- Решать уравнения и неравенства.
- Выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами.
- Уметь строить и исследовать простейшие математические модели.
- Использовать математику в практической деятельности.

Для сдачи профильного уровня понадобится всё то же самое, только более углублённо. А ещё необходимо будет владеть элементами комбинаторики, статистики и теории вероятностей.



Благодарю!

**Спасибо за внимание**