Особенности выполнения задания №18 из материалов ЕГЭ по математике

Панина Нина Александровна,
учитель математики МБОУ
«Средняя школа № 33, г. Смоленск»

Типы заданий с параметром (постановка задачи)

- Решить уравнение (неравенство, систему) при всех допустимых значениях параметра

- Выяснить, при каких значениях параметра все решения уравнения (неравенства) удовлетворяют заданным ограничениям (например, 1) больше (меньше) некоторого числового значения или 2) содержатся в промежутке конечной длины)

- Найти все значения параметра, при каждом из которых уравнение (неравенство, система) имеет определённое количество решений

- Найти все значения параметра, при каждом из которых функция обладает указанным свойством (например, 1) её наименьшее значение больше (не меньше) некоторого числа, или 2) наибольшее значение меньше (не больше) некоторого числа, или 3) имеет заданное количество точек экстремума).

Приёмы решения уравнений, неравенств, систем

- уравнения и неравенства чаще всего допускают разложение на множители с выходом на утверждение: «**Произведение равно 0 тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен 0, а остальные множители при этом не теряют смысла**», то есть сводятся к решению простейших уравнений (неравенств) с ограничениями

- уравнения и неравенства допускают возможность преобразования к некоторому каноническому виду (например, к уравнению окружности с центром в точке $(x_0; y_0)$ и радиусом R)

- содержат знак модуля (модулей), а следовательно, распадаются на части при снятии знака. Следует иметь ввиду, что знак модуля может присутствовать в неявном виде (например, в задании содержится выражение $\sqrt{x^2-6x+9}$, которое, по сути, равно $|x-3|$)

Методы выполнения заданий с параметром

Графический (сводится к графической работе в координатной плоскости). Метод эффективен, если выполняются три условия:

- ✓ можно создать уравнение, не содержащее параметр,
- ✓ может быть построен график этого уравнения,
- ✓ график уравнения с параметром несложно построить при любом конкретно указанном значении параметра.

Изображаются в координатной плоскости график первого уравнения и совокупность графиков второго уравнения. Затем выполняется анализ взаимного расположения графиков при изменении допустимых значений параметра в соответствии с условием задачи.

Методы выполнения заданий с параметром

Аналитический (от «аналитика» – расчёт, применение численных методов для выявления важных закономерностей).

- ✓ В процессе аналитических преобразований рассматривается полная система гипотез,
- ✓ выполняется аналитический расчёт при каждой гипотезе,
- ✓ полученные ответы исследуются методом наложения и объединяются в совокупность.

Методы выполнения заданий с параметром

Интегрированный (чаще всего, аналитические преобразования прекращаются на некотором шаге и результат графически интерпретируется в координатной плоскости, решение продолжается графическим методом).

В некоторых источниках метод называется графо-аналитическим

Особенности выполнения заданий с параметром

Независимо от метода решения, поставленной задачи, исследование должно быть полным, соответствующим всем допустимым значениям параметра.

Из результатов полного исследования делается выборка в соответствии с выполняемым заданием. Она сопровождается словами «... (то, что требуется в задании) ... выполняется тогда и только тогда, когда ... (указываются все искомые значения параметра)...».

В 2023 году участники ЕГЭ выполняли задание

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

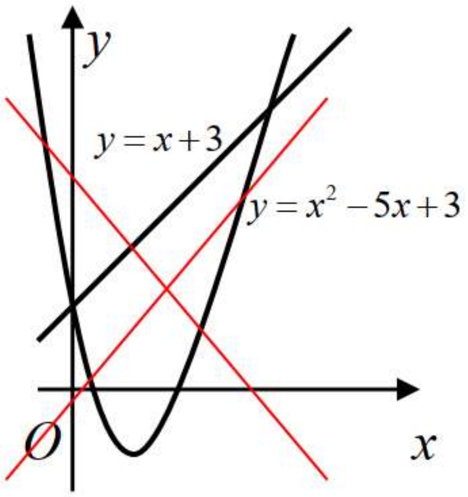
$$\begin{cases}\left(x^2-5x-y+3\right)\cdot\sqrt{x-y+3}=0,\\ y=3x+a\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

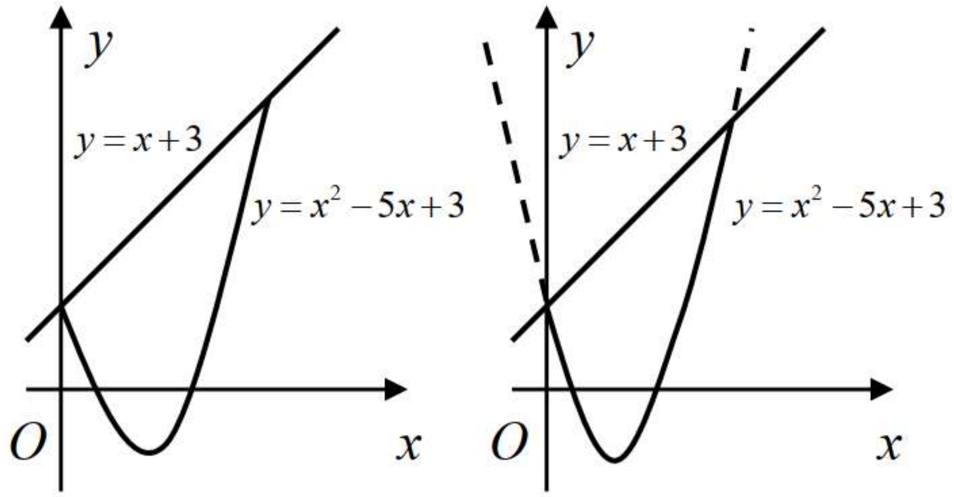
Большинство из них выбрали графический метод решения.

Содержательная особенность задания – наличие ограничения, вытекающего из первого уравнения системы. К сожалению, не все участники, выполнявшие задание, ограничили параболу. Часть участников допустили ошибку – начертили график сплошной линией во всей координатной плоскости. Рассмотрим эту ошибку более подробно.

Правильным является построение не всей параболы $y = x^2 - 5x + 3$, а только той её части, которая располагается не выше прямой $y = x + 3$. Ещё один способ правильного построения: часть параболы, удовлетворяющая ограничению, то есть в полуплоскости $y \le x + 3$, изображается сплошной линией, не удовлетворяющая – штриховой (но это верно, только для 11 класса, не для 9 и ОГЭ).



НЕПРАВИЛЬНО



ПРАВИЛЬНО

Вторая типичная ошибка: участники, исследующие момент касания прямой и параболы с помощью квадратного уравнения, находили значение параметра, соответствующего касанию линий, и прекращали исследование. А нужно было его продолжить: доказать, что при этом значении параметра точка касания лежит в области ограничения.

Причиной ошибки явилось неумение длительное время удерживать главную информацию в сознании при работе с другой информацией или недопонимание выполняемой работы, формальное выполнение действий (без их осмысления).

Рассмотрим решение задания ЕГЭ-2023 более подробно

$$\begin{cases}\left(x^2-5x-y+3\right)\cdot\sqrt{x-y+3}=0,\\ y=3x+a.\end{cases}$$

$$1)\ \left(x^2-5x-y+3\right)\cdot\sqrt{x-y+3}=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-5x-y+3=0,\\ x-y+3\ge 0;\end{cases}\\ \sqrt{x-y+3}=0\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=x^2-5x+3,\\ y\le x+3;\end{cases}\\ y=x+3.\end{array}\right.$$

Графиком первого уравнения исходной системы является совокупность двух линий: части параболы $y=x^2-5x+3$, которая расположена в полуплоскости $y\le x+3$, и прямой $y=x+3$.

Вершина параболы расположена в точке $(2,5;\ -3,25)$.

Линии $y=x^2-5x+3$ и $y=x+3$ пересекаются в точках (0; 3) и (6; 9), так как

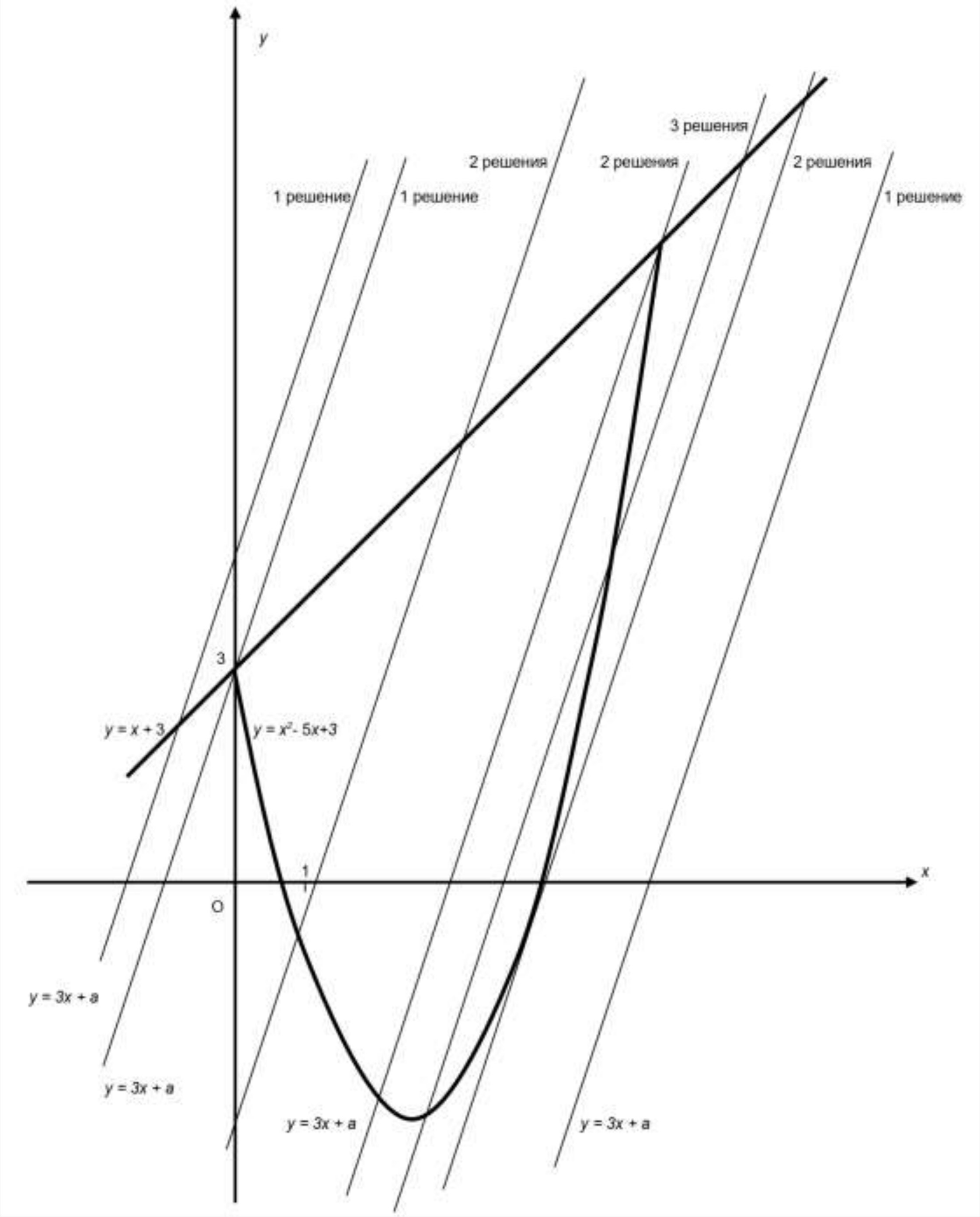
$$x^2-5x+3=x+3 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-6x=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=6. \end{array}\right.$$

Если $x = 0$, то $y = 3$.

Если $x = 6$, то $y = 9$.

2) При каждом значении a уравнение $y=3x+a$ определяет прямую, параллельную прямой $y=3x$.

3) Рассмотрим взаимное расположение графиков уравнений в координатной плоскости.


y
3 решения
2 решения
2 решения
2 решения
1 решение
1 решение
1 решение
3
y = x + 3
y = x² - 5x+3
1
x
O
y = 3x + a
y = 3x + a
y = 3x + a
y = 3x + a

Если прямая $y = 3x + a$ проходит через точку (6; 9) (общая точка линий $y = x^2 - 5x + 3$ и $y = x + 3$), то

$$9 = 3 \cdot 6 + a;$$

$$a = -9.$$

При $a = -9$ исходная система имеет ровно 2 различных решения.

Если прямая $y = 3x + a$ проходит через точку (0; 3) (общая точка линий $y = x^2 - 5x + 3$ и $y = x + 3$), то

$$3 = 3 \cdot 0 + a;$$

$$a = 3.$$

При $a = 3$ исходная система имеет ровно 1 решение.

При всех значениях параметра, удовлетворяющих неравенству $-9 \le a < 3$, исходная система имеет ровно 2 различных решения.

2 различных решения имеет исходная система и в том случае, когда прямая $y=3x+a$ касается параболы, а затем пересекает прямую $y=x+3$.

Тогда уравнение $x^2-5x+3=3x+a$ имеет ровно 1 корень.

$x^2-8x+(3-a)=0;$

$D=64-4(3-a)=52+4a=0;$

$a=-13.$

При $a=-13$ абсцисса точки касания равна 4.

$0<4<6$. Следовательно, точка касания расположена в той части параболы, которая удовлетворяет ограничению $y\le x+3$.

При $a=-13$ исходная система имеет ровно 2 различных решения.

Следовательно, исходная система имеет ровно 2 различных решения тогда и только тогда, когда $a \in \{-13\} \cup [-9; 3)$.

Ответ: $a \in \{-13\} \cup [-9; 3)$.

PS 1) Установлены те значения параметра, при каждом из которых исходная система имеет ровно 2 различных решения.

2) Полное исследование взаимного расположения линий в координатной плоскости позволило отсечь значения параметра, при которых исходная система имеет не 2 различных решения.

Таким образом, решение действительно доказывает «… **тогда и только тогда, когда** …».

Решение на высший балл, обязательно должно установить искомые значения параметра и доказать, что других нет.

PS Случай касания можно было исследовать с помощью производной.

$y = x^2 - 5x + 3 -$ уравнение параболы,

$y = 3x + a -$ касательная к параболе.

Тогда $y'(x_0) = k_{\text{кас.}} = 3$ (геометрический смысл производной)

$y' = 2x - 5,$

$y'(x_0) = 2x_0 - 5 = 3,$

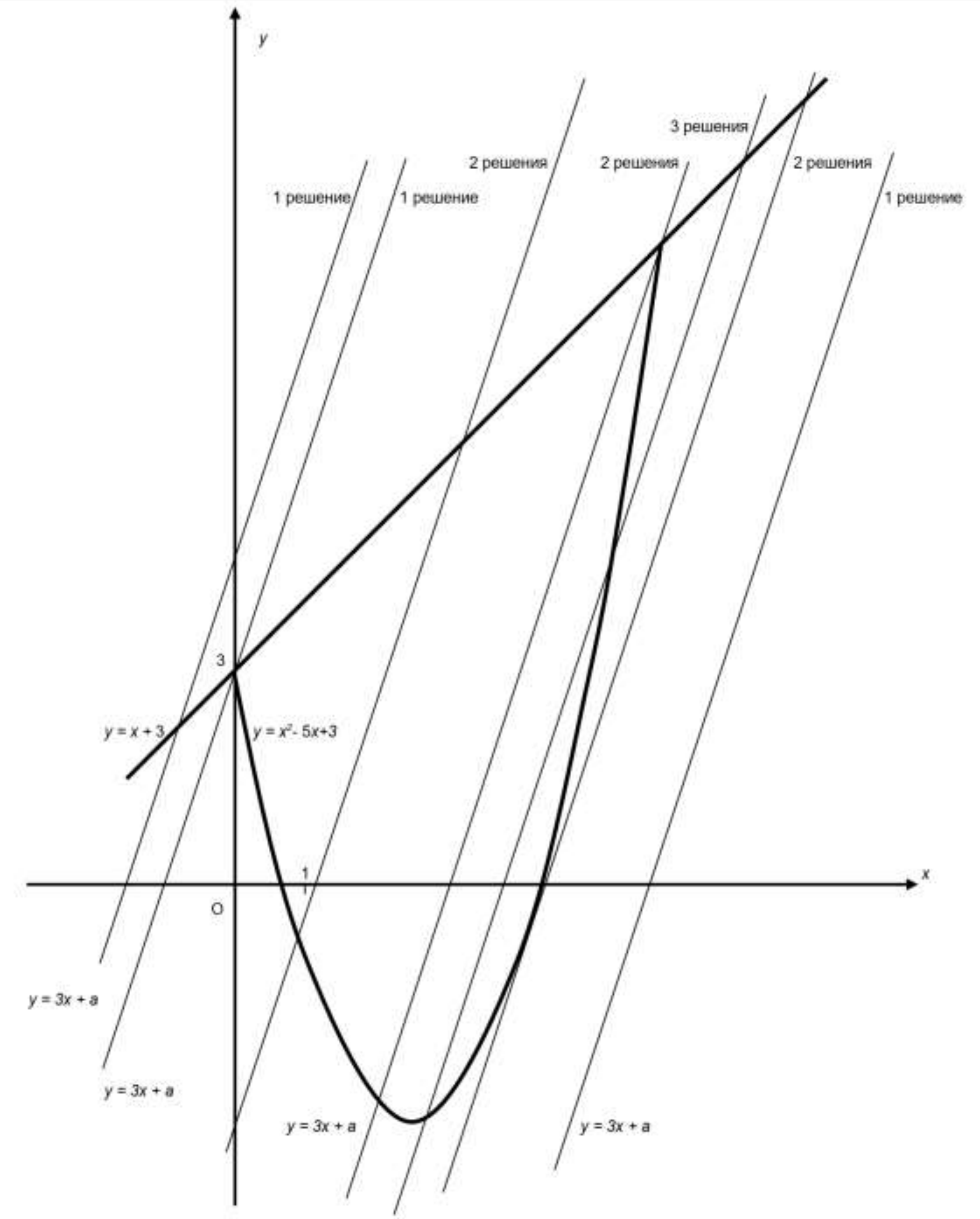
$x_0 = 4 -$ абсцисса точки касания.

$0 < 4 < 6$. Следовательно, точка касания расположена в той части параболы, которая удовлетворяет ограничению $y \le x + 3$.

$y_0 = 4^2 - 5 \cdot 4 + 3 = -1 -$ ордината точки касания.

Тогда $-1 = 3 \cdot 4 + a \quad \Leftrightarrow \quad a = -13.$

Оценивание решения



1 балл

Если прямая $y = 3x + a$ проходит через точку (6; 9) (общая точка линий $y = x^2 - 5x + 3$ и $y = x + 3$), то

$$9 = 3 \cdot 6 + a;$$

$$a = -9.$$

При $a = -9$ исходная система имеет ровно 2 различных решения.

Если прямая $y = 3x + a$ проходит через точку (0; 3) (общая точка линий $y = x^2 - 5x + 3$ и $y = x + 3$), то

$$3 = 3 \cdot 0 + a;$$

$$a = 3.$$

При $a = 3$ исходная система имеет ровно 1 решение.

При всех значениях параметра, удовлетворяющих неравенству $-9 \le a < 3$, исходная система имеет ровно 2 различных решения.

2 балла

Следовательно, исходная система имеет ровно 2 различных решения тогда и только тогда, когда $a \in \{-13\} \cup [-9; 3)$.

Ответ: $a \in \{-13\} \cup [-9; 3)$.

PS Чётко доказано, что условие выполняется **тогда и только тогда, когда …** и получен верный ответ. Решение не содержит математических неточностей, недообоснований.

4 балла

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\left(x^2+y^2+6x\right)\cdot\sqrt{x+y+6}=0,\\ y=a(x-3)\end{cases}$$

имеет 2 различных решения.

Решение

$$\begin{cases}\left(x^2+y^2+6x\right)\cdot\sqrt{x+y+6}=0,\\ y=a(x-3)\end{cases}$$

1) $\left(x^2+y^2+6x\right)\cdot\sqrt{x+y+6}=0;$

$$\begin{cases}x^2+y^2+6x=0,\\ x+y+6\geq 0\end{cases} \quad \text{или} \quad \sqrt{x+y+6}=0;$$

$$\begin{cases}\left(x^2+6x\right)+y^2=0,\\ y\geq -x-6\end{cases} \quad\quad x+y+6=0;$$

$$\left\{\begin{array}{l}(x+3)^2+y^2=9,\\ y\ge -x-6\end{array}\right. \quad \text{или} \quad y=-x-6.$$

Первое уравнение исходной системы определяет совокупность прямой $y=-x-6$ и дуги окружности $(x+3)^2+y^2=9$ с центром в точке (–3; 0) и радиусом 3, заданной в полуплоскости $y\ge -x-6$.

Найдём общие точки прямой и дуги окружности.

$$\begin{cases}(x+3)^2+y^2=9,\\ y=-x-6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+3)^2+(-x-6)^2=9,\\ y=-x-6.\end{cases}$$

$$\left|\begin{array}{l} x^2+6x+9+x^2+12x+36=9;\\ 2x^2+18x+36=0;\\ x^2+9x+18=0;\\ D=81-72=9=3^2;\\ x_{1,2}=\dfrac{-9\pm3}{2};\\ x_1=-6;\quad x_2=-3.\end{array}\right.$$

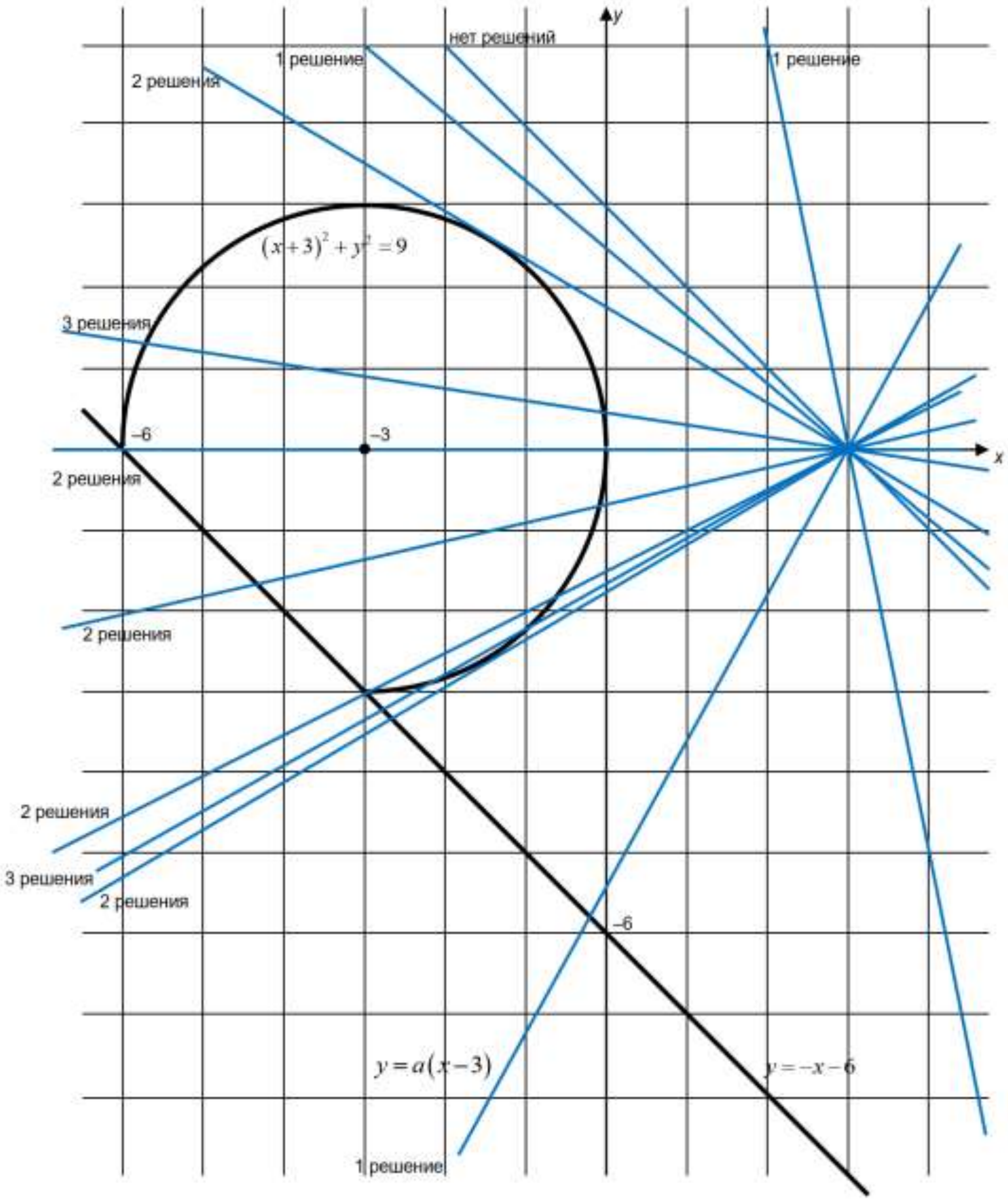
$$\begin{cases}x=-6,\\ y=0\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}x=-3,\\ y=-3.\end{cases}$$

Общие точки линий – это (–6; 0) и (–3; –3).

2) $y=a(x-3)$

Второе уравнение исходной системы определяет пучок прямых, проходящих через точку (3; 0).

3) Проанализируем взаимное расположение линий, определяемых уравнениями исходной системы.



Если прямая $y = a(x-3)$ проходит через точку (–6; 0), то исходная система имеет ровно 2 различных решения. Тогда имеем:

$$0 = a(-6-3) \quad \Leftrightarrow \quad a = 0.$$

Если прямая $y = a(x-3)$ проходит через точку (–3; –3), то исходная система имеет ровно 2 различных решения. Тогда имеем:

$$-3 = a(-3-3) \quad \Leftrightarrow \quad 6a = 3 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{2}.$$

При всех значениях a, удовлетворяющих неравенству $0 \le a \le \frac{1}{2}$, исходная система имеет ровно 2 различных решения.

Кроме этого, исходная система имеет 2 различных решения, если прямая $y = a(x-3)$ является касательной к дуге окружности $(x+3)^2 + y^2 = 9$, а точка касания расположена в полуплоскости $y \ge -x-6$.

Выясним, при каком значении a прямая $y=a(x-3)$ имеет с окружностью $(x+3)^2+y^2=9$ только одну общую точку.

$$(x+3)^2+\left(a(x-3)\right)^2=9 \;\Leftrightarrow\; x^2+6x+9+a^2x^2-6a^2x+9a^2=9 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \left(a^2+1\right)x^2-6\left(a^2-1\right)x+9a^2=0. \qquad (1)$$

$$D=36\left(a^4-2a^2+1\right)-36a^2\left(a^2+1\right)=36\left(a^4-2a^2+1-a^4-a^2\right)=36\left(1-3a^2\right).$$

Уравнение (1) имеет ровно 1 корень тогда и только тогда, когда дискриминант равен 0. Следовательно,

$$36\left(1-3a^2\right)=0 \;\Leftrightarrow\; 3a^2=1 \;\Leftrightarrow\; a^2=\frac{1}{3} \;\Leftrightarrow\; a=\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \;\Leftrightarrow\; a=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Получили 2 различных значения параметра. Следовательно, существует 2 касательных к дуге окружности, проходящих через точку (3; 0).

Тогда $x_0=\dfrac{6\left(a^2-1\right)}{2\left(a^2+1\right)}=\dfrac{3\left(a^2-1\right)}{a^2+1}$ – решение уравнения (1).

Если $a=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, то $x_0=\frac{3\left(a^2-1\right)}{a^2+1}=\frac{3\left(\frac{1}{3}-1\right)}{\frac{1}{3}+1}=\frac{-2\cdot 3}{4}=-\frac{3}{2}$.

Абсциссы точек касания равны.

При каждом значении параметра найдём ординату точки касания и проверим выполнение ограничения.

Если $a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, то $y_0=-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{3}{2}-3\right)=\frac{9}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,

$\frac{3\sqrt{3}}{2}\geq-\left(-\frac{3}{2}\right)-6,\quad \frac{\sqrt{27}}{2}\geq-\frac{9}{2}-$ верно.

Если $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$, то $y_0=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{3}{2}-3\right)=-\frac{9}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$,

$-\frac{3\sqrt{3}}{2}\geq-\left(-\frac{3}{2}\right)-6,\quad -\frac{\sqrt{27}}{2}\geq-\frac{9}{2}-$ верно.

При $a=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ касание происходит в полуплоскости $y\geq -x-6$.

Следовательно, при $a = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ графики уравнений исходной системы имеют ровно 2 общие точки.

Итак, исходная система имеет ровно 2 различных решения тогда и только тогда, когда $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $0 \le a \le \frac{1}{2}$, $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $0 \le a \le \frac{1}{2}$, $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция $f(x)=x^2-2\left|x-a^2\right|-8x$ имеет более двух точек экстремума.

Решение. $f(x)=x^2-2\left|x-a^2\right|-8x$

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2\left(-x+a^2\right)-8x, \text{ если } x-a^2<0, \\ x^2-2\left(x-a^2\right)-8x, \text{ если } x-a^2\geq 0; \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x-2a^2-8x, \text{ если } x<a^2, \\ x^2-2x+2a^2-8x, \text{ если } x\geq a^2; \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2-6x-2a^2, \text{ если } x<a^2, \\ x^2-10x+2a^2, \text{ если } x\geq a^2. \end{cases}$$

1) $y = x^2 - 6x - 2a^2 -$ парабола, ветви, которой направлены вверх.

$x_0 = 3 -$ абсцисса вершины параболы.

Так как график функции $f(x)$ будем изображать схематично, то значение ординаты не учитываем.

Выберем ту часть параболы, которая удовлетворяет условию $x < a^2$.

2) $y = x^2 - 10x + 2a^2 -$ парабола, ветви которой направлены вверх.

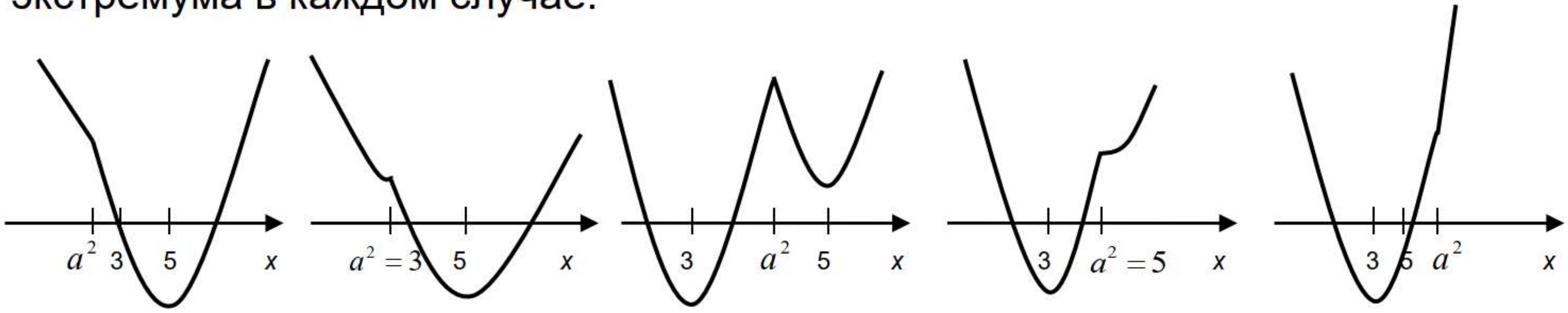
$x_0 = 5 -$ абсцисса вершины параболы.

Так как график функции $f(x)$ будем изображать схематично, то значение ординаты не учитываем.

Выберем ту часть параболы, которая удовлетворяет условию $x \geq a^2$.

В точке $\left(a^2; a^4 - 8a^2\right)$ части графика склеиваются.

Изобразим схематично график функции $f(x)$, учитывая все возможные случаи расположения точек 3; 5 и a^2, и проанализируем количество точек экстремума в каждом случае.



$a^2<3$ — 5 – единственная точка экстремума

$a^2=3$ — 5 – единственная точка экстремума

$3<a^2<5$ — 3; a^2 и 5 – точки экстремума

$a^2=5$ — 3 – единственная точка экстремума

$a^2>5$ — 3 – единственная точка экстремума

Функция $f(x)=x^2-2|x-a^2|-8x$ имеет более двух точек экстремума тогда и только тогда, когда $3<a^2<5$. Тогда

$$-\sqrt{5}<a<-\sqrt{3} \quad \text{или} \quad \sqrt{3}<a<\sqrt{5}.$$

Ответ: $a\in\left(-\sqrt{5};-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};\sqrt{5}\right)$.

Обратим внимание на форму ответа.

В заданиях с параметром **параметр обязательно присутствует в ответе**. Ответ может быть представлен аналитической моделью (и даже при совокупности неравенств (через запятую)), может – как утверждение типа «параметр принадлежит множеству (объединению подмножеств)».

Выполняя задание с параметром (графически или аналитически) всегда нужно проанализировать условие.

В заданиях, разобранных выше, показатель степени параметра совпадал с показателями переменной x, и поэтому мы воспринимали x как независимую переменную (аргумент), y – как функцию аргумента x, параметр a – как произвольную постоянную.

Но если показатель степени параметра a меньше показателя x, то лучше применить приём произвольного выбора постоянной, а именно: воспринимать a как аргумент, x воспринимать как произвольную постоянную. Например, уравнение $x^4+x^3-3ax^2-2ax+2a^2=0$ лучше воспринимать не как уравнение 4-й степени относительно x (с параметром a), а как квадратное относительно переменной a (с параметром x): $2a^2-\left(3x^2+2x\right)a+\left(x^4+x^3\right)=0$.

На ЕГЭ нет столь сложных заданий. Но ВУЗы, которые проводят дополнительные вступительные испытания (ДВИ), часто используют этот приём. Если в классе есть обучающиеся, которые готовятся не только к ЕГЭ по профильной математике, а и к ДВИ по математике, то им нужно освоить подобный подход.

Суть решения:

$$2a^2-\left(3x^2+2x\right)a+\left(x^4+x^3\right)=0$$

$$D=x^2\left(9x^2+12x+4\right)-8x^2\left(x^2+x\right)=x^2\left(9x^2+12x+4-8x^2-8x\right)=$$

$$=x^2\left(x^2+4x+4\right)=x^2\left(x+2\right)^2$$

$D\geq 0$ при любом действительном x. Тогда

$$a=\frac{3x^2+2x\pm x\left(x+2\right)}{4}$$

PS Учли, что $\pm\sqrt{m^2}=\pm|m|=\pm m.$

$$\left[\begin{array}{l} a=\dfrac{3x^2+2x-x^2-2x}{4}, \\ a=\dfrac{3x^2+2x+x^2+2x}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{2x^2}{4}, \\ a=\dfrac{4x^2+4x}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{x^2}{2}, \\ a=x^2+x. \end{array}\right.$$

Исходное уравнение распалось на два квадратных уравнения относительно переменной x (с параметром a):

$$x^2 = 2a \quad \text{или} \quad x^2 + x - a = 0.$$

Первое уравнение имеет

- только 1 корень (это 0) при $a = 0$,
- 2 различных действительных решения $-\sqrt{2a}$ и $\sqrt{2a}$ при $a > 0$,
- при $a < 0$ первое уравнение не имеет корней.

Так как дискриминант второго уравнения равен $1+4a$, то второе уравнение

- не имеет корней при $a < -\frac{1}{4}$,
- имеет ровно 1 корень (это $-\frac{1}{2}$) при $a = -\frac{1}{4}$,
- имеет 2 различных действительных решения (это $\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}$ и $\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}$) при $a > -\frac{1}{4}$.

Выясним, при каких значениях параметра a решения уравнений совпадают. Учтём при этом знаки корней уравнения. Необходимое ограничение: $a \geq 0$, так как только при этих значениях параметра оба уравнения имеют решения. Заметим, что при $a \geq 0$ значение дискриминанта не меньше 1, следовательно, при $a \geq 0$

$$\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2} \leq 0, \qquad \frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2} \geq 0.$$

Имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{-1-\sqrt{1+4a}}{2} = -\sqrt{2a}, \\ a \geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{-1+\sqrt{1+4a}}{2} = \sqrt{2a}, \\ a \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1-\sqrt{1+4a} = -2\sqrt{2a}, \\ a \geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} -1+\sqrt{1+4a} = 2\sqrt{2a}, \\ a \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+\sqrt{1+4a} = 2\sqrt{2a}, \\ a \geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{1+4a} = 1+2\sqrt{2a}, \\ a \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+2\sqrt{1+4a}+1+4a=8a, \\ a \ge 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+4a=1+4\sqrt{2a}+8a, \\ a \ge 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{1+4a}=2a-1, \\ a \ge 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+\sqrt{2a}=0, \\ a \ge 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+4a=4a^2-4a+1, \\ a \ge \dfrac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{2}\right)=0, \\ a \ge 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-2a=0, \\ a \ge \dfrac{1}{2}; \end{cases}$$

$$a=0.$$

$$a=2.$$

Итак, при $a=2$ совпадают отрицательные решения (получаем один отрицательный корень –2 и два положительных: 2 и 1),
при $a=0$ совпадают нулевые решения (получаем два корня –1 и 0).

Следовательно, исходное уравнение $x^4 + x^3 - 3ax^2 - 2ax + 2a^2 = 0$

при $a < -\frac{1}{4}$ не имеет корней,

при $a = -\frac{1}{4}$ имеет ровно один корень $-\frac{1}{2}$,

при $-\frac{1}{4} < a < 0$ имеет два различных решения:

$\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}$ и $\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}$,

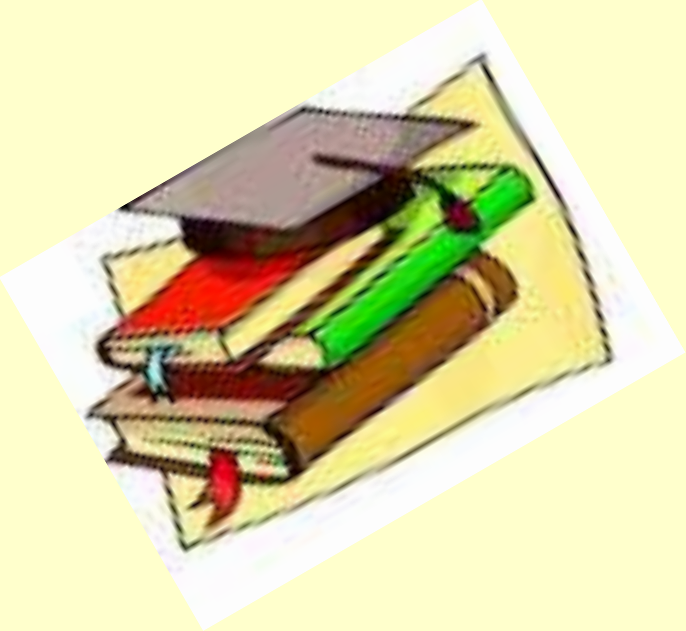
при $a = 0$ имеет два корня –1 и 0,

при $0 < a < 2$ имеет четыре решения: $\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}$; $-\sqrt{2a}$; $\sqrt{2a}$; $\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}$,

при $a = 2$ имеет три корня –2; 1; 2,

при $a > 2$ имеет четыре решения: $\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}$; $-\sqrt{2a}$; $\sqrt{2a}$; $\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

Благодарю за внимание!



Панина Н. А.
+79051620770