Особенности выполнения задания 15

Панина Нина Александровна,
учитель математики МБОУ
«Средняя школа № 33, г. Смоленск»

Образцы проекта демоверсии

15 Решите неравенство $\log_{11}\left(8x^2+7\right)-\log_{11}\left(x^2+x+1\right)\geq\log_{11}\left(\frac{x}{x+5}+7\right)$.

Ответ: $(-\infty;-12];\ \left(-\frac{35}{8};0\right]$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек –12 и/или 0, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задания 2023 года

- Решите неравенство

$$\frac{\log_2 x^2 - \log_3 x^2}{\log_6^2\left(2x^2 - 10x + 12,5\right) + 1} \geq 0$$

$$\log_3^2(x-4) - \log_3^2(x-6) \leq 0$$

$$\log_{0,1}\left(x^3 - 5x^2 - 25x + 125\right) \leq \log_{0,01}(x-5)^4$$

$$\frac{4^x + 2^{x+1} - 36}{2^x - 5} + \frac{4^{x+1} - 2^{x+5} + 4}{2^x - 8} \leq 5 \cdot 2^x + 7$$

Образцы решения неравенства $\frac{\log_2 x^2 - \log_3 x^2}{\log_6^2\left(2x^2 - 10x + 12,5\right) + 1} \geq 0$

Первый способ правильного оформления решения.

Неравенство определено, если

$$\begin{cases} x^2 > 0, \\ 2x^2 - 10x + 12,5 > 0, \\ \log_6^2\left(2x^2 - 10x + 12,5\right) + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ 2x^2 - 10x + 12,5 > 0. \end{cases}$$

При любом допустимом значении переменной

$$\log_6^2\left(2x^2 - 10x + 12,5\right) + 1 \geq 1 > 0.$$

Поэтому исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ 2x^2 - 10x + 12,5 > 0, \\ \log_2 x^2 - \log_3 x^2 \geq 0. \end{cases}$$

$$2x^2-10x+12,5>0$$

$$2x^2-10x+12,5=0,$$

$$D=100-4\cdot 2\cdot 12,5=100-100=0,$$

$$x=\frac{10}{4}=2,5$$

$$2x^2-10x+12,5=2\left(x-2,5\right)^2,$$

$$2\left(x-2,5\right)^2>0,$$

$$x\neq 2,5.$$

$$\log_2 x^2-\log_3 x^2\geq 0,$$

$$\log_2 x^2-\frac{\log_2 x^2}{\log_2 3}\geq 0,$$

$$\frac{\log_2 x^2\cdot\log_2 3-\log_2 x^2}{\log_2 3}\geq 0,$$

$$\frac{\log_2 x^2\left(\log_2 3-1\right)}{\log_2 3}\geq 0.$$

Так как $\log_2 3\geq 1$, то имеем $\log_2 x^2\geq 0$.

3) Получили

$$\begin{cases} x\neq 0, \\ x\neq 2,5, \\ \log_2 x^2\geq 0; \end{cases}\qquad \begin{cases} x\neq 0, \\ x\neq 2,5, \\ \log_2 x^2\geq \log_2 1; \end{cases}\qquad \begin{cases} x\neq 0, \\ x\neq 2,5, \\ x^2\geq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq 2,5, \\ x \leq -1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq 2,5, \\ x \geq 1; \end{cases}$$

$$x \leq -1 \qquad \left[\begin{array}{l} 1 \leq x < 2,5, \\ x > 2,5. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty; -1] \cup [1; 2,5) \cup (2,5; +\infty)$.

Суть решения первым способом:

1. Выяснили, какими свойствами должны обладать допустимые значения переменной.
2. Обратили внимание на множество значений знаменателя и упростили исходное неравенство.
3. Свели решение исходного неравенства к решению системы из свойств ОДЗ и неравенства, полученного в результате упрощения.
4. Решили полученную систему.

Второй способ правильного оформления решения.

$$\frac{\log_2 x^2 - \log_3 x^2}{\log_6^2\left(2x^2 - 10x + 12,5\right) + 1} \geq 0;$$

$$\begin{cases} x^2 > 0, \\ 2x^2 - 10x + 12,5 > 0, \\ \log_6^2\left(2x^2 - 10x + 12,5\right) + 1 \neq 0, \\ \dfrac{\log_2 x^2 - \log_3 x^2}{\log_6^2\left(2x^2 - 10x + 12,5\right) + 1} \geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq 0, \\ 2x^2 - 10x + 12,5 > 0, \\ \log_2 x^2 - \log_3 x^2 \geq 0; \end{cases}$$

$$2x^2 - 10x + 12,5 > 0$$

$$2x^2 - 10x + 12,5 = 0,$$

$$D = 100 - 4 \cdot 2 \cdot 12,5 = 100 - 100 = 0,$$

$$x = \frac{10}{4} = 2,5$$

$$2x^2 - 10x + 12,5 = 2(x - 2,5)^2,$$

$$2(x - 2,5)^2 > 0,$$

$$x \neq 2,5.$$

$$\log_2 x^2 - \log_3 x^2 \geq 0;$$

$$\log_2 x^2 - \frac{\log_2 x^2}{\log_2 3} \geq 0;$$

$$\log_2 x^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\log_2 3}\right) \geq 0;$$

$$\log_2 x^2 \cdot \frac{\log_2 3 - 1}{\log_2 3} \geq 0;$$

$$\log_2 x^2 \geq 0;$$

$$\log_2 x^2 \geq \log_2 1;$$

$$x^2 \geq 1;$$

$$\left[\begin{array}{l} x \leq -1 \\ x \geq 1 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq 2,5, \\ x \leq -1 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq 2,5, \\ x \geq 1; \end{cases}$$

$$x \leq -1 \qquad\qquad \left[\begin{array}{l} 1 \leq x < 2,5, \\ x > 2,5. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty; -1] \cup [1; 2,5) \cup (2,5; +\infty)$.

Суть решения вторым способом:

К исходному неравенству присоединили все ограничения, связанные с областью допустимых значений, получили систему неравенств и решили её.

Способ более распространённый, классический.

Трудоёмкости, затраты времени примерно одинаковые при решении этими двумя способами. Обучающимся можно рекомендовать любой из этих способов оформления.

Обратим внимание

Неравенство $\log_2 x^2 \ge 0$ действительно можно решать так:

$$\log_2 x^2 \ge 0;$$
$$\log_2 x^2 \ge \log_2 1;$$
$$x^2 \ge 1;$$
$$\left[\begin{array}{l} x \le -1 \\ x \ge 1. \end{array}\right.$$

Но неравенство $\log_2 (x-5) \le 0$ следует решать иначе:

I способ:

$$\log_2 (x-5) \le 0;$$
$$\log_2 (x-5) \le \log_2 1;$$
$$0 < x-5 \le 1;$$
$$5 < x \le 6$$

II способ:

$$\log_2 (x-5) \le 0;$$
$$\log_2 (x-5) \le \log_2 1;$$
$$\begin{cases} x-5 > 0, \\ x-5 \le 1; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x > 5, \\ x \le 6 \end{cases}$$
$$5 < x \le 6$$

По страницам школьного учебника

- Мерзляк А. Г.

Теорема 7.1

При $a > 1$ неравенство $\log_a x_1 > \log_a x_2$ выполняется тогда и только тогда, когда $x_1 > x_2 > 0$; при $0 < a < 1$ неравенство $\log_a x_1 > \log_a x_2$ выполняется тогда и только тогда, когда $0 < x_1 < x_2$.

- Алимов Ш. А., Колягин Ю. М.

Решить неравенство

$$\log_2 (x-3) + \log_2 (x-2) \leqslant 1. \qquad (3)$$

Таким образом, исходное неравенство (3) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} (x-3)(x-2) \leqslant 2, \\ x > 3. \end{cases}$$

По страницам школьного учебника

- Мордкович А. Г.

На практике эти теоремы применяют так: переходят от неравенства $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ при $a > 1$ к равносильной ему системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases}$$

а при $0 < a < 1$ — к равносильной системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Типичная ошибка

Преобразование

$$\log_2(x-5) \le \log_2 1;$$

$$x-5 \le 1$$

является ошибочным. Его выполнение в задании 15 влечёт за собой оценку 0 первичных баллов. Причина очевидна: неравенства неравносильны, преобразование изменило множество решений.

Бессловесное решение по плану: 1) нахождение ОДЗ, 2) выполнение преобразований без учёта ОДЗ и нахождение множества решений полученного неравенства, 3) коррекция полученного множества с учётом ОДЗ – в подобном случае **не является верным**.

Результат: 0 первичных баллов.

Причина: на втором шаге получено множество решений, не учитывающее допустимость значений переменной для исходного неравенства. **Теоремы, позволяющей научно обосновать связь множеств решений неравносильных неравенств, не существует**.

Допускается решение

Если второй шаг сопровождается указанием множества, на котором верны формулируемые в дальнейшем утверждения, то решение по плану:

1) нахождение ОДЗ,

2) выполнение преобразований неравенства и нахождение множества решений полученного неравенства,

3) коррекция полученного множества с учётом ОДЗ –

признаётся правильным.

Рассмотрим такой способ оформления на примере.

Решите неравенство $\log_3^2(x-4)-\log_3^2(x-6)\le 0$

Решение.

$$\log_3^2(x-4)-\log_3^2(x-6)\le 0;$$

$$\left(\log_3(x-4)-\log_3(x-6)\right)\left(\log_3(x-4)+\log_3(x-6)\right)\le 0.$$

Неравенство определено, если

$$\begin{cases} x-4>0, \\ x-6>0; \end{cases} \quad \begin{cases} x>4, \\ x>6; \end{cases} \quad x>6.$$

При $x>6$ **имеем:**

$$\left(\log_3\frac{x-4}{x-6}\right)\cdot\log_3\left((x-4)\cdot(x-6)\right)\le 0;$$

$$\begin{cases} \log_3\dfrac{x-4}{x-6}\ge 0, \\ \log_3\left((x-4)\cdot(x-6)\right)\le 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \log_3\dfrac{x-4}{x-6}\le 0 \\ \log_3\left((x-4)\cdot(x-6)\right)\ge 0. \end{cases}$$

1) **При** $x > 6$

$$\begin{cases} \log_3 \dfrac{x-4}{x-6} \geq 0, \\ \log_3 \left((x-4) \cdot (x-6) \right) \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \log_3 \dfrac{x-4}{x-6} \geq \log_3 1, \\ \log_3 \left((x-4) \cdot (x-6) \right) \leq \log_3 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x-4}{x-6} \geq 1, \\ \left((x-4) \cdot (x-6) \right) \leq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-4}{x-6} - 1 \geq 0, \\ (x-4) \cdot (x-6) - 1 \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x-4-x+6}{x-6} \geq 0, \\ x^2 - 6x - 4x + 24 - 1 \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x-6} \geq 0, \\ x^2 - 10x + 23 \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x-6 > 0, \\ \left(x^2 - 10x + 25 \right) - 2 \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 6, \\ (x-5)^2 - \left(\sqrt{2} \right)^2 \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 6, \\ \left(x - 5 - \sqrt{2} \right) \left(x - 5 + \sqrt{2} \right) \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 6, \\ 5 - \sqrt{2} \leq x \leq 5 + \sqrt{2}; \end{cases} \quad 6 < x \leq 5 + \sqrt{2}.$$

Заметим, что полученное множество решений удовлетворяет необходимому условию $x > 6$.

2) **При** $x > 6$

$$\begin{cases} \log_3 \dfrac{x-4}{x-6} \le 0, \\ \log_3 \left((x-4) \cdot (x-6) \right) \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \log_3 \dfrac{x-4}{x-6} \le \log_3 1, \\ \log_3 \left((x-4) \cdot (x-6) \right) \ge \log_3 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x-4}{x-6} \le 1, \\ \left((x-4) \cdot (x-6) \right) \ge 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-4}{x-6} - 1 \le 0, \\ (x-4) \cdot (x-6) - 1 \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x-4-x+6}{x-6} \le 0, \\ x^2 - 6x - 4x + 24 - 1 \ge 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x-6} \le 0, \\ x^2 - 10x + 23 \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 6 < 0, \\ x^2 - 10x + 23 \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 6, \\ x^2 - 10x + 23 \ge 0. \end{cases}$$

Система не имеет решений, удовлетворяющих необходимому условию $x > 6$.

Итак, множеством решений исходного неравенства является промежуток $\left(6; 5+\sqrt{2}\right]$.

Ответ: $\left(6; 5+\sqrt{2}\right]$.

Метод интервалов

Теоретическое обоснование метода:

Если на интервале $(a; b)$ функция f непрерывна и не обращается в 0, то она на этом интервале сохраняет постоянный знак.

На ЕГЭ разрешается применение и школьного метода интервалов (относится только к рациональным функциям: квадратичной, дробно-рациональной) и обобщённого метода.

Алгоритм применения метода интервалов

1. Найти область определения функции и нули функции
2. На числовую прямую нанести исходные ограничения, в полученном множестве допустимых значений переменной нанести область определения и нули функции
3. В каждом образовавшемся промежутке допустимых значений переменной определить знак функции
4. **Штриховкой выделить** те промежутки, которые соответствуют множеству решений неравенства
5. Объединить промежутки, создавая множество решений неравенства

Решение неравенства методом интервалов

$$\frac{x^3-5x^2-25x+125}{\log_2(x-1)} \le 0$$

$$\begin{cases} x-1>0, \\ \log_2(x-1)\ne 0, \\ \dfrac{x^3-5x^2-25x+125}{\log_2(x-1)} \le 0; \end{cases}$$

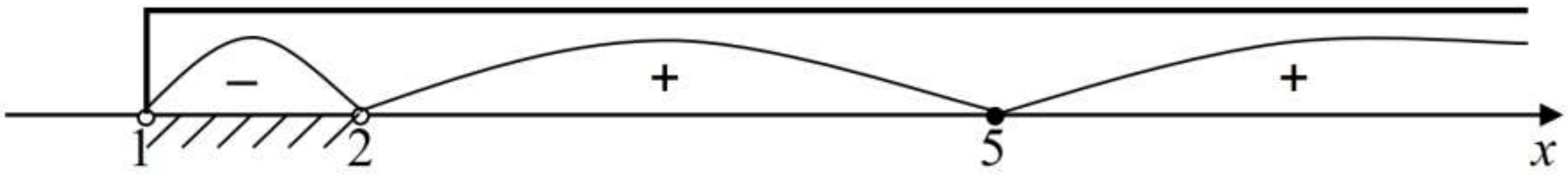
$$\left| \begin{aligned} & x^3-5x^2-25x+125=\left(x^3-5x^2\right)+\left(-25x+125\right)= \\ & = x^2(x-5)-25(x-5)=(x-5)\left(x^2-25\right)=(x-5)^2(x+5) \end{aligned} \right.$$

$$\begin{cases} x>1, \\ x-1\ne 1, \\ \dfrac{(x-5)^2(x+5)}{\log_2(x-1)} \le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x>1, \\ x\ne 2, \\ \dfrac{(x-5)^2(x+5)}{\log_2(x-1)} \le 0. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{(x-5)^2(x+5)}{\log_2(x-1)}$ при $x>1,\ x\neq 2.$

При $x>1,\ x\neq 2$ функция определена.

$f(x)=0$ при $x=5,\quad -5\notin(1;2)\cup(2;+\infty).$



$x\in(1;2)\cup\{5\}$

Ответ: $(1;2)\cup\{5\}$.

Оформление решения методом интервалов при работе с рациональной функцией

$$\frac{x^3-5x^2-25x+125}{\log_2(x-1)}\le 0$$

$$\begin{cases} x-1>0, \\ \log_2(x-1)\ne 0, \\ \dfrac{x^3-5x^2-25x+125}{\log_2(x-1)}\le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x-1>0, \\ \log_2(x-1)\ne 0, \\ \dfrac{x^3-5x^2-25x+125}{\log_2(x-1)-0}\le 0; \end{cases}$$

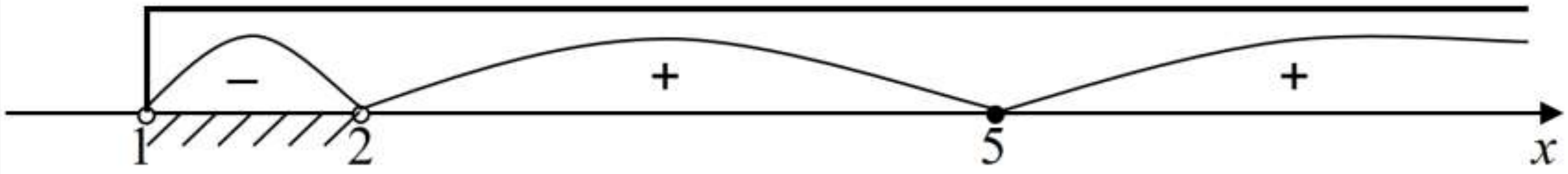
$$\left| \begin{aligned} & x^3-5x^2-25x+125=\left(x^3-5x^2\right)+(-25x+125)= \\ & =x^2(x-5)-25(x-5)=(x-5)\left(x^2-25\right)=(x-5)^2(x+5) \end{aligned} \right.$$

$$\begin{cases} x>1, \\ x-1\ne 1, \\ \dfrac{(x-5)^2(x+5)}{\log_2(x-1)-\log_2 1}\le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x>1, \\ x\ne 2, \\ \dfrac{(x-5)^2(x+5)}{(x-1-1)(2-1)}\le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x>1, \\ x\ne 2, \\ \dfrac{(x-5)^2(x+5)}{x-2}\le 0. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{(x-5)^2(x+5)}{x-2}$ при $x>1,\ x\neq 2.$

При $x>1,\ x\neq 2$ функция определена.

$$f(x)=0 \text{ при } x=5, \quad -5\notin(1;2)\cup(2;+\infty).$$



$$x\in(1;2)\cup\{5\}$$

Ответ: $(1;2)\cup\{5\}$.

Метод систем

Теоретическое обоснование метода систем:

Произведение **двух множителей**

- больше 0, тогда и только тогда, когда множители принимают значения одного знака: +,+ или –,–,
- меньше 0, тогда и только тогда, когда множители принимают значения разных знаков: +,– или –,+.

$$a \cdot b > 0 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0, \\ b > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0, \\ b < 0. \end{cases} \end{array}\right. \qquad a \cdot b < 0 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0, \\ b < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0, \\ b > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Следствия

$f(x)\cdot g(x)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases} f(x)\le 0,\\ g(x)\le 0.\end{cases}\end{array}\right.$	$f(x)\cdot g(x)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)\ge 0,\\ g(x)\le 0\end{cases}\\ \begin{cases} f(x)\le 0,\\ g(x)\ge 0.\end{cases}\end{array}\right.$
$\dfrac{f(x)}{g(x)}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)\ge 0,\\ g(x)> 0\end{cases}\\ \begin{cases} f(x)\le 0,\\ g(x)< 0.\end{cases}\end{array}\right.$	$\dfrac{f(x)}{g(x)}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)\ge 0,\\ g(x)< 0\end{cases}\\ \begin{cases} f(x)\le 0,\\ g(x)> 0.\end{cases}\end{array}\right.$

Использование свойства монотонности функции

Суть метода: замена неравенства $h(f(x)) > h(g(x))$ менее сложным неравенством.

Теоретическое обоснование метода

- Если $h(x)$ – монотонно возрастающая функция, то неравенство $h(f(x)) > h(g(x))$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$ в области определения исходного неравенства
- Если $h(x)$ – монотонно убывающая функция, то неравенство $h(f(x)) > h(g(x))$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$ в области определения исходного неравенства.

Применение свойства монотонности функции при решении неравенства $\log_3^2(x-4)-\log_3^2(x-6)\le 0$

$$\log_3^2(x-4)-\log_3^2(x-6)\le 0;$$

$$\left(\log_3(x-4)-\log_3(x-6)\right)\left(\log_3(x-4)+\log_3(x-6)\right)\le 0.$$

Неравенство определено, если

$$\begin{cases} x-4>0, \\ x-6>0; \end{cases} \quad \begin{cases} x>4, \\ x>6; \end{cases} \quad x>6.$$

$$\left.\begin{array}{l} x-4>x-6 \text{ при любом действительном } x, \\ \text{Функция } y=\log_3 t \text{ является строго возрастающей при } t>0 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \log_3(x-4)>\log_3(x-6) \text{ при } x>6,$$

$$\log_3(x-4)-\log_3(x-6)>0 \text{ при } x>6.$$

Тогда при $x>6$ исходное неравенство равносильно неравенству

$$\log_3(x-4)+\log_3(x-6)\le 0.$$

Имеем:

$$\begin{cases}\log_3(x-4)+\log_3(x-6)\le 0,\\ x>6;\end{cases}\quad \begin{cases}\log_3\left((x-4)(x-6)\right)\le 0,\\ x>6;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\log_3\left((x-4)(x-6)\right)\le \log_3 1,\\ x>6;\end{cases}\quad \begin{cases}(x-4)(x-6)\le 1,\\ x>6;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2-10x+24-1\le 0,\\ x>6;\end{cases}\quad \begin{cases}x^2-10x+23\le 0,\\ x>6;\end{cases}\quad \begin{cases}(x-5)^2-2\le 0,\\ x>6;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(x-5-\sqrt{2}\right)\left(x-5+\sqrt{2}\right)\le 0,\\ x>6;\end{cases}\quad \begin{cases}5-\sqrt{2}\le x\le 5+\sqrt{2},\\ x>6;\end{cases}\quad 6<x\le 5+\sqrt{2}$$

Ответ: $\left(6;5+\sqrt{2}\right]$.

Метод рационализации

Суть метода: **метод рационализации заключается в замене сложного выражения $F(x)$ на более простое выражение $G(x)$, при которой неравенство $G(x) \vee 0$ равносильно неравенству $F(x) \vee 0$ в области определения выражения $F(x)$.**

Под знаком $\vee$ подразумевается один из знаков >, <, $\geq$, $\leq$.

$F(x)$	$G(x)$
$\log_{h(x)} f(x) - \log_{h(x)} g(x)$	$(f(x)-g(x))(h(x)-1)$
$\log_{h(x)} f(x)$	$(f(x)-1)(h(x)-1)$
$(h(x))^{f(x)} - (h(x))^{g(x)}$	$(f(x)-g(x))(h(x)-1)$
$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$	$f(x)-g(x)$
$\lvert f(x)\rvert - \lvert g(x)\rvert$	$(f(x)-g(x))(f(x)+g(x))$

ЗАМЕНА ВОЗМОЖНА ТОЛЬКО В ОБЛАСТИ ДОПУСТИМЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИСХОДНОГО НЕРАВЕНСТВА!!!!!!!!!!!!!!!

Решите неравенство $\log_2 x\cdot\log_3 x-2\log_2 x-3\log_3 x\ge -6$

Сайт *ALEXLARIN.NET,* вариант *439*

Решение. $\log_2 x\cdot\log_3 x-2\log_2 x-3\log_3 x\ge -6;$

$$\begin{cases}x>0,\\ \log_2 x\cdot\log_3 x-2\log_2 x-3\log_3 x+6\ge 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x>0,\\ \left(\log_2 x\cdot\log_3 x-2\log_2 x\right)-\left(3\log_3 x-6\right)\ge 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x>0,\\ \log_2 x\cdot\left(\log_3 x-2\right)-3\left(\log_3 x-2\right)\ge 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ (\log_3 x - 2)(\log_2 x - 3) \ge 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ (\log_3 x - \log_3 9)(\log_2 x - \log_2 8) \ge 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ (x - 9)\cdot(3 - 1)\cdot(x - 8)\cdot(2 - 1) \ge 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ (x - 9)(x - 8) \ge 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \le 8 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x \ge 9; \end{cases}$$

$$0 < x \le 8 \qquad\qquad x \ge 9.$$

Ответ: $(0; 8] \cup [9; +\infty)$.

Полезная привычка

Если левая часть нестрогого неравенства с 0 в правой части разложена на множители и хотя бы один из множителей в области определения неравенства **не принимает значения какого-либо знака**, то в области определения неравенства имеет смысл перейти к совокупности уравнения и строгого неравенства.

Рассмотрим положение на примере.

Решите неравенство $\left(0,5^{x-3}-4\right)\sqrt{(x+2)(x-4)}\le 0$

Решение. $\left(0,5^{x-3}-4\right)\sqrt{(x+2)(x-4)}\le 0$.

Неравенство определено, если $(x+2)(x-4)\ge 0$,

$$-2\le x\le 4.$$

Заметим, что при $x\in[-2;4]$ $\quad\sqrt{(x+2)(x-4)}\ge 0$.

Тогда неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0,5^{x-3}-4=0,\\ -2\le x\le 4,\end{cases}\\ \sqrt{(x+2)(x-4)}=0,\\ \begin{cases}\left(0,5^{x-3}-4\right)\sqrt{(x+2)(x-4)}<0\\ -2\le x\le 4;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^{-x+3}=2^2,\\ -2\le x\le 4,\end{cases}\\ x=-2,\\ x=4,\\ \begin{cases}\left(0,5^{x-3}-4\right)\sqrt{(x+2)(x-4)}<0\\ -2<x<4;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-x+3=2,\\-2\le x\le 4,\end{cases}\\x=-2,\\x=4,\\\begin{cases}0,5^{x-3}-4<0,\\-2<x<4;\end{cases}\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1,\\-2\le x\le 4,\end{cases}\\x=-2,\\x=4\\\begin{cases}2^{-x+3}<2^2,\\-2<x<4;\end{cases}\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}x=1,\\x=-2,\\x=4\\\begin{cases}-x+3<2,\\-2<x<4;\end{cases}\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}x=-2,\\x=1,\\x=4,\\\begin{cases}x>1,\\-2<x<4;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=-2,\\x=1,\\x=4,\\1<x<4;\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}x=-2,\\1\le x\le 4.\end{array}\right.$$

Ответ: $\{-2\}\cup[1;4]$

Итог

Самый надёжный способ решения неравенства, следующий:

- к условию присоединить все ограничения и получить систему, равносильную исходному неравенству;

- полученную систему упростить, если есть такая возможность;

- решить отдельно все неравенства системы (если есть возможность, то решать не на всей числовой прямой, а только в области допустимых значений);

- построить геометрическую модель с выделением штриховкой (или дугами) множества решений каждого неравенства и найти решение всей системы.

Поскольку исходное неравенство и система равносильны, то полученное множество будет являться и множеством решений исходного неравенства.

Благодарю за внимание!

Панина Н. А.
+79051620770