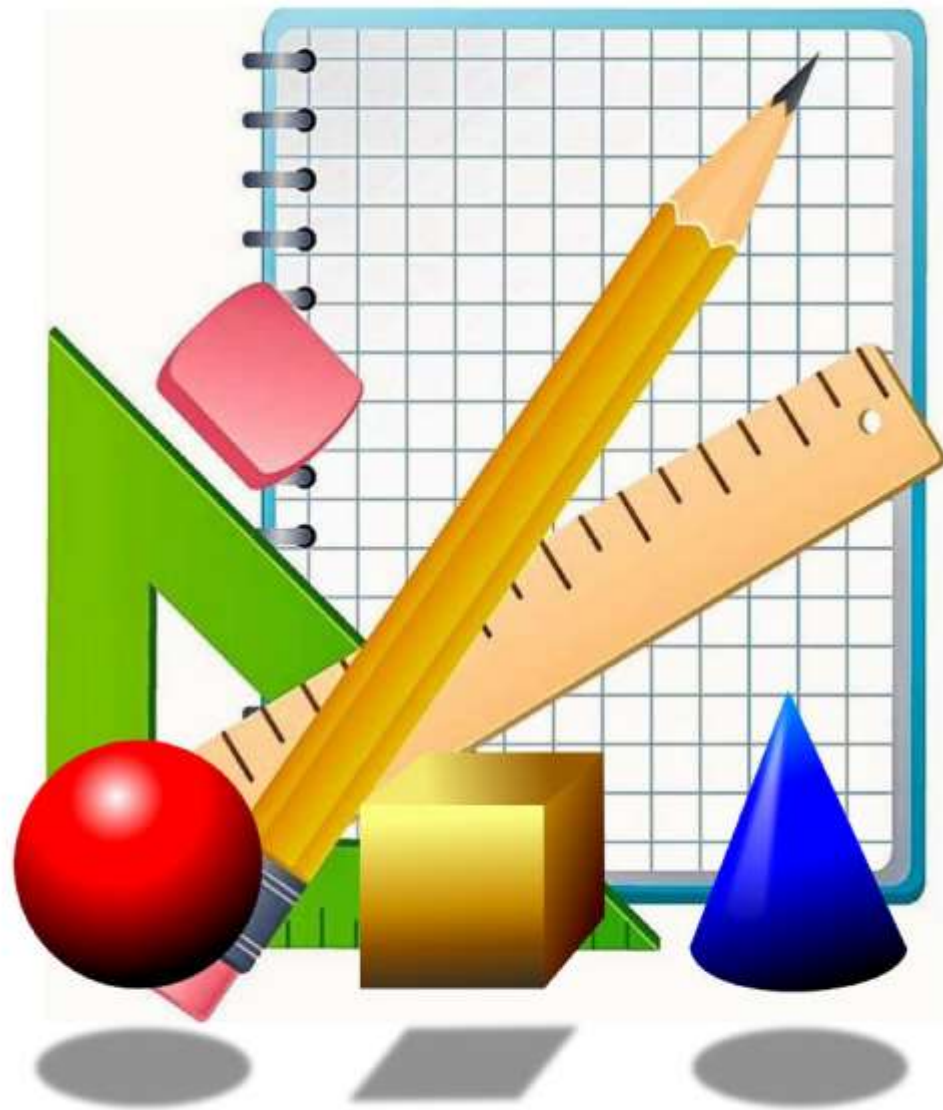


Интенсив «Решение заданий
повышенного и высокого уровня сложности»



Решение неравенств

Панина Н. А.
учитель математики
МБОУ СШ № 33,
г. Смоленск

2025-2026 учебный год



На занятии рассмотрим задания

Пример 1 (проект демоверсии ЕГЭ-2026). Решите неравенство $\frac{27^x - 9^{x+1} + 3^{x+3} - 27}{50x^2 - 110x + 60,5} \geq 0$.

Обратим внимание на способы разложения числителя на множители. В знаменателе **смоделируем** формулу сокращённого умножения – квадрат разности двух выражений. Решим неравенство обобщённым методом интервалов и методом интервалов

Пример 2 (проект демоверсии ЕГЭ-2026). Решите неравенство $\frac{\log_2(2-x) - \log_2(x+1)}{\log_2^2 x^2 + \log_2 x^4 + 1} \geq 0$

Рассмотрим несколько способов правильного оформления решения, обсудим ошибочные решения, акцентируя внимание на ошибочных преобразованиях и критериях распознавания ошибок.

Пример 3. (alexlarin.net [Тренировочный вариант №511](#) [ЕГЭ - 2026](#))

Решите неравенство $\frac{360 - 28 \cdot 36^x - 66 \cdot 6^x}{36^x - 7 \cdot 6^x + 12} \leq 36^x + 2 \cdot 6^{x+1} + 30$.

Обсудим способы предупреждения самой массовой за последние 5 лет ошибки, допущенной при решении неравенства.

В некоторых случаях решения будут прерываться комментариями автора. Они выделены фиолетовым цветом. В развёрнутом ответе, конечно же, эти фрагменты прописывать не нужно.



Пример 1 (проект демоверсии ЕГЭ-2026)

Решите неравенство $\frac{27^x - 9^{x+1} + 3^{x+3} - 27}{50x^2 - 110x + 60,5} \geq 0$.

План решения:

И числитель, и знаменатель дроби нужно разложить на множители.

Первый способ. Заметим, что числитель можно представить в виде алгебраической суммы: куб первого выражения минус утроенное произведение квадрата первого выражения на второе выражение плюс утроенное произведение первого выражения на квадрат второго выражения минус куб второго выражения. Применяя формулу сокращённого умножения, эту алгебраическую сумму можно представить как куб разности двух выражений:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Второй способ. Можно разложить числитель на множители методом группировки. Группировать нужно первое слагаемое с последним, а второе слагаемое с третьим. Иные способы группировки не позволят разложить выражение на множители.

В знаменателе ни первое, ни последнее слагаемое не являются квадратами выражений с целочисленными коэффициентами. Но если умножить знаменатель на 2 (чтобы сохранить тождественность преобразования (основное свойство дроби) числитель тоже умножим на 2 (можно сделать иначе: на 2 разделить обе части неравенства), то и первое, и последнее слагаемые полученного выражения окажутся квадратами выражений с целочисленными коэффициентами, а второе слагаемое окажется удвоенным произведением оснований квадратов. Следовательно, умножение знаменателя на 2 позволит смоделировать в знаменателе формулу «квадрат разности двух выражений».

Итак, первый шаг решения – выполнение цепочки тождественных преобразований для приведения неравенства к виду, позволяющему применить обобщённый метод интервалов в первом и втором способах.

Чтобы привести неравенство к виду, позволяющему применять метод интервалов (не обобщённый), в конце первого шага нужно применить метод рационализации (можно применять на ЕГЭ без дополнительных обоснований).

Итак, второй шаг решения – применение обобщённого метода интервалов в первом и втором способах, метода интервалов в третьем способе.

Решение. Первый способ (преобразование неравенства по формулам сокращённого умножения)

$$\begin{aligned} \frac{27^x - 9^{x+1} + 3^{x+3} - 27}{50x^2 - 110x + 60,5} \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{\left((3^3)^x - 9 \cdot (3^2)^x + 3^3 \cdot 3^x - 3^3 \right) \cdot 2}{(50x^2 - 110x + 60,5) \cdot 2} \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{2 \cdot \left((3^x)^3 - 3 \cdot (3^x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^x \cdot 3^2 - 3^3 \right)}{100x^2 - 220x + 121} \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{2(3^x - 3)^3}{(10x - 11)^2} \geq 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{2(3^x - 3)^3}{(10x - 11)^2}$.

Функция не определена при $x = 1,1$, обращается в 0 при $x = 1$.



$$x \in [1; 1,1) \cup (1,1; +\infty).$$

Ответ: $[1; 1,1) \cup (1,1; +\infty)$.

Второй способ решения (преобразование числителя методом группировки)

$$\begin{aligned}
\frac{27^x - 9^{x+1} + 3^{x+3} - 27}{50x^2 - 110x + 60,5} \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{(27^x - 27) + (-9^{x+1} + 3^{x+3})}{2(50x^2 - 110x + 60,5)} \geq \frac{0}{2} \Leftrightarrow \frac{\left((3^3)^x - 3^3\right) + (-9 \cdot 9^x + 3^3 \cdot 3^x)}{100x^2 - 220x + 121} \geq 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{\left((3^x)^3 - 3^3\right) + (-9 \cdot (3^x)^2 + 3 \cdot 9 \cdot 3^x)}{(10x)^2 - 2 \cdot 10x \cdot 11 + 11^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(3^x - 3)\left((3^x)^2 + 3 \cdot 3^x + 9\right) - 9 \cdot 3^x(3^x - 3)}{(10x - 11)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{(3^x - 3)\left((3^x)^2 + 3 \cdot 3^x + 9 - 9 \cdot 3^x\right)}{(10x - 11)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(3^x - 3)\left((3^x)^2 - 6 \cdot 3^x + 9\right)}{(10x - 11)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(3^x - 3)(3^x - 3)^2}{(10x - 11)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{(3^x - 3)^3}{(10x - 11)^2} \geq 0.
\end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{(3^x - 3)^3}{(10x - 11)^2}$.

Функция не определена при $x = 1,1$, обращается в 0 при $x = 1$.



$$x \in [1; 1,1) \cup (1,1; +\infty).$$

Ответ: $[1; 1,1) \cup (1,1; +\infty)$.

Третий способ решения (с применением метода рационализации)

Метод рационализации

Если **решение неравенства организовано исключительно в области выполнения всех ограничений**, то сложные логарифмические, показательные, иррациональные **множители** можно заменить рациональными выражениями с сохранением знака неравенства. Полученное неравенство будет равносильно исходному, если замена выполняется по следующим правилам:

Исходный множитель	Выражение, заменяющее исходный множитель
$\log_{\varphi(x)} f(x) - \log_{\varphi(x)} g(x)$	$(f(x) - g(x))(\varphi(x) - 1)$
$(\varphi(x))^{f(x)} - (\varphi(x))^{g(x)}$	$(f(x) - g(x))(\varphi(x) - 1)$
$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$	$f(x) - g(x)$

PS Теорему о рационализации применяем на ЕГЭ без дополнительных обоснований (не требуется доказывать равносильность исходного и получаемого неравенств). Применение теоремы ВНЕ области допустимых значений переменной является ошибкой (даже, если потом появится ссылка «с учётом ОДЗ ...»).

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{27^x - 9^{x+1} + 3^{x+3} - 27}{50x^2 - 110x + 60,5} \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{\left((3^3)^x - 9 \cdot (3^2)^x + 3^3 \cdot 3^x - 3^3\right) \cdot 2}{(50x^2 - 110x + 60,5) \cdot 2} \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{2 \cdot \left((3^x)^3 - 3 \cdot (3^x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^x \cdot 3^2 - 3^3\right)}{100x^2 - 220x + 121} \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{2(3^x - 3)^3}{(10x - 11)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 11 \neq 0, \\ \frac{2(x-1)^3(3-1)^3}{(10x-11)^2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1,1, \\ \frac{2^4(x-1)^3}{(10x-11)^2} \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{2^4(x-1)^3}{(10x-11)^2}$ при $x \neq 1,1$.

$f(x) = 0$ при $x = 1$.



$$x \in [1; 1,1) \cup (1,1; +\infty).$$

Ответ: $[1; 1,1) \cup (1,1; +\infty)$.



Пример 2 (проект демоверсии ЕГЭ-2026). Решите неравенство $\frac{\log_2(2-x) - \log_2(x+1)}{\log_2^2 x^2 + \log_2 x^4 + 1} \geq 0$

На первый взгляд кажется, что в знаменателе можно выполнить 2 красивых преобразования, которые позволят представить знаменатель как квадрат суммы двух выражений:

$$\begin{aligned}\log_2^2 x^2 + \log_2 x^4 + 1 &= (\log_2 x^2)^2 + 4\log_2 x + 1 = (2\log_2 x)^2 + 4\log_2 x + 1 = \\ &= 4\log_2^2 x + 4\log_2 x + 1 = (2\log_2 x + 1)^2\end{aligned}$$

К сожалению, это ошибочное мнение. Дважды допущена грубейшая ошибка!

$$\log_2 x^2 \neq 2\log_2 x; \quad \log_2 x^4 \neq 4\log_2 x.$$

Доказать эти неравенства можно методом пробной точки. Первое неравенство: при $x = -4$ левая часть не теряет смысла и равна $\log_2(-4)^2 = \log_2 16 = 4$, а правая принимает вид $2\log_2(-4)$ – не существует. Доказали, что существуют такие значения переменной, при которых левая и правая части не равны. Это означает, что $\log_2 x^2 \neq 2\log_2 x$. Аналогично доказывается и второе неравенство: $\log_2 x^4 \neq 4\log_2 x$.



Запомним главный критерий возможности-невозможности преобразования **в любом алгебраическом задании:**

- Если выполнение преобразования **СУЖАЕТ** область допустимых значений, то это преобразование **ВЫПОЛНЯТЬ НЕЛЬЗЯ!**
- Если выполнение преобразования **РАСШИРЯЕТ** область допустимых значений, то это преобразование **ВЫПОЛНИТЬ МОЖНО, НО ТОЛЬКО ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ РАССМОТРЕНИИ РЕЗУЛЬТАТА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОГРАНИЧЕНИЙ**, которым должна удовлетворять переменная (*устанавливаются по исходному неравенству (уравнению)*)
- Если область допустимых значений **НЕ ИЗМЕНЯЕТСЯ** при выполнении преобразования, то это преобразование **МОЖНО ВЫПОЛНЯТЬ**



Решение. $\frac{\log_2(2-x) - \log_2(x+1)}{\log_2^2 x^2 + \log_2 x^4 + 1} \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x > 0, \\ x+1 > 0, \\ x^2 > 0, \\ x^4 > 0, \\ \log_2^2 x^2 + \log_2 x^4 + 1 \neq 0, \\ \frac{\log_2(2-x) - \log_2(x+1)}{(\log_2 x^2)^2 + \log_2((x^2)^2) + 1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x > -1, \\ x \neq 0, \\ \log_2^2 x^2 + \log_2 x^4 + 1 \neq 0, \\ \frac{\log_2(2-x) - \log_2(x+1)}{(\log_2 x^2)^2 + 2\log_2 x^2 + 1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 2, \\ x \neq 0, \\ \log_2 x^2 + 1 \neq 0, \\ \frac{\log_2(2-x) - \log_2(x+1)}{(\log_2 x^2 + 1)^2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

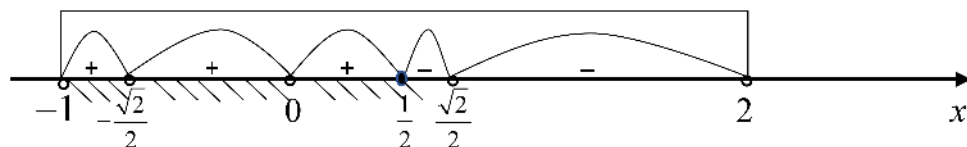
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 2, \\ x \neq 0, \\ \log_2 x^2 \neq -1, \\ \frac{\log_2(2-x) - \log_2(x+1)}{(\log_2 x^2 - (-1))^2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 2, \\ x \neq 0, \\ x^2 \neq \frac{1}{2}, \\ \frac{\log_2(2-x) - \log_2(x+1)}{\left(\log_2 x^2 - \log_2 \frac{1}{2}\right)^2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 2, \\ x \neq 0, \\ x^2 \neq \frac{1}{2}, \\ \frac{((2-x) - (x+1))(2-1)}{\left(\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)(2-1)\right)^2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 2, \\ x \neq 0, \\ x^2 \neq \frac{1}{2} \\ \frac{1-2x}{\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 2, \\ x \neq 0, \\ x \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \frac{1-2x}{\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \geq 0. \end{cases}$$

При $x \in \left(-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 2\right)$ рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{1-2x}{\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}.$$

Если ответы на вопросы: «В каких точках функция не определена?», «В каких точках функция обращается в 0?» очевидны, то после введения функции можно сразу исследовать её знак в каждом промежутке знакопостоянства функции, то есть продолжать работу методом интервалов.



$$x \in \left(-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right].$$

Ответ: $\left(-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right].$

PS Обратим внимание на технику упрощения выражений вида $\log_a^k x^4$:

$$\log_a^k x^4 = \left(\log_a x^4\right)^k = \left(2 \log_a x^2\right)^k = 2^k \cdot \log_a^k x^2.$$

Например, $\log_3^2 x^4 = \left(\log_3 x^4\right)^2 = \left(2 \log_3 x^2\right)^2 = 2^2 \cdot \log_3^2 x^2 = 4 \log_3^2 x^2,$

$$\log_2^3 (1-x)^8 = \left(\log_2 \left((1-x)^2\right)^4\right)^3 = \left(4 \log_2 (1-x)^2\right)^3 = 4^3 \cdot \log_2^3 (1-x)^2 = 64 \log_2^3 (1-x)^2.$$

Второй способ решения (без применения метода рационализации):

$$\frac{\log_2(2-x) - \log_2(x+1)}{\log_2^2 x^2 + \log_2 x^4 + 1} \geq 0;$$

$$\begin{cases} 2-x > 0, \\ x+1 > 0, \\ x^2 > 0, \\ x^4 > 0, \\ \log_2^2 x^2 + \log_2 x^4 + 1 \neq 0, \\ \frac{\log_2(2-x) - \log_2(x+1)}{(\log_2 x^2)^2 + \log_2((x^2)^2) + 1} \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2, \\ x > -1, \\ x \neq 0, \\ \log_2^2 x^2 + \log_2 x^4 + 1 \neq 0, \\ \frac{\log_2(2-x) - \log_2(x+1)}{(\log_2 x^2)^2 + 2 \cdot \log_2 x^2 + 1} \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 < x < 2, \\ x \neq 0, \\ \log_2 x^2 + 1 \neq 0, \\ \frac{\log_2(2-x) - \log_2(x+1)}{(\log_2 x^2 + 1)^2} \geq 0. \end{cases}$$

При выполнении указанных ограничений знаменатель имеет смысл и при любых допустимых значениях x принимает только положительные значения. Поэтому система равносильна системам

$$\begin{cases} -1 < x < 2, \\ x \neq 0, \\ \log_2 x^2 + 1 \neq 0, \\ \log_2(2-x) - \log_2(x+1) \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 < x < 2, \\ x \neq 0, \\ \log_2 x^2 \neq -1, \\ \log_2(2-x) \geq \log_2(x+1); \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 < x < 2, \\ x \neq 0, \\ x^2 \neq 2^{-1}, \\ \log_2(x+1) \leq \log_2(2-x); \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 < x < 2, \\ x \neq 0, \\ x \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ 0 < x+1 \leq 2-x; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -1 < x < 2, \\ x \neq 0, \\ x \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ 2x \leq 1; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -1 < x < 2, \\ x \neq 0, \\ x \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ x \leq \frac{1}{2}; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -1 < x \leq \frac{1}{2}, \\ x \neq 0, \\ x \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}, \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} -1 < x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0 \\ 0 < x \leq \frac{1}{2}. \end{array} \right.$$

Ответ: $\left(-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

PS В процессе решения соблюдаем следующие правила:

- 1) Все преобразования должны обеспечивать равносильность неравенств (систем неравенств), при этом знак равносильности может отсутствовать.
- 2) Логические преобразования необходимо прокомментировать, если отсутствует знак равносильности.
- 3) **Обратите внимание на правильное снятие знака логарифма:**

Исходное неравенство: $\log_2(x+1) \leq \log_2(2-x)$

Получаемое неравенство: $0 < x+1 \leq 2-x$, так как только в такой редакции исходное и получаемое неравенства равносильны.

ВНИМАНИЕ! Неравенство $x+1 \leq 2-x$ **НЕ РАВНОСИЛЬНО** исходному, нельзя так выполнить упрощение.



Задание из тренировочной базы (alexlarin.net [Тренировочный вариант №511](#) ЕГЭ - 2026)

Решите неравенство $\frac{360 - 28 \cdot 36^x - 66 \cdot 6^x}{36^x - 7 \cdot 6^x + 12} \leq 36^x + 2 \cdot 6^{x+1} + 30$

Решение. $\frac{360 - 28 \cdot 36^x - 66 \cdot 6^x}{36^x - 7 \cdot 6^x + 12} \leq 36^x + 2 \cdot 6^{x+1} + 30 \Leftrightarrow \frac{360 - 28 \cdot (6^x)^2 - 66 \cdot 6^x}{(6^x)^2 - 7 \cdot 6^x + 12} \leq (6^x)^2 + 2 \cdot 6 \cdot 6^x + 30$

Пусть $6^x = t$, тогда неравенство примет вид $\frac{360 - 28t^2 - 66t}{t^2 - 7t + 12} \leq t^2 + 12t + 30$;

$$\frac{360 - 28t^2 - 66t - (t^2 + 12t + 30)(t^2 - 7t + 12)}{t^2 - 7t + 12} \leq 0;$$

$$\frac{360 - 28t^2 - 66t - t^4 + 7t^3 - 12t^2 - 12t^3 + 84t^2 - 144t - 30t^2 + 210t - 360}{t^2 - 7t + 12} \leq 0;$$

$$\frac{-t^4 - 5t^3 + 14t^2}{t^2 - 7t + 12} \leq 0;$$

$$\frac{t^4 + 5t^3 - 14t^2}{t^2 - 7t + 12} \geq 0;$$

$$\frac{t^2(t^2 + 5t - 14)}{t^2 - 7t + 12} \geq 0;$$

$$\left| \begin{array}{l} t^2 + 5t - 14 = 0 \\ t^2 - 7t + 12 = 0 \end{array} \right.$$

$$D = 25 + 56 = 81 = 9^2$$

$$t_{1,2} = \frac{-5 \pm 9}{2}$$

$$t_1 = -7; \quad t_2 = 2$$

$$\text{Следовательно, } t^2 + 5t - 14 = (t+7)(t-2).$$

$$D = 49 - 48 = 1$$

$$t_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{2}$$

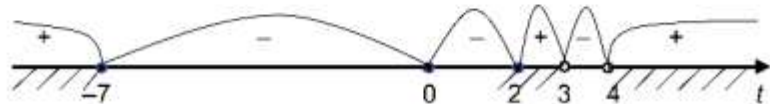
$$t_1 = 3; \quad t_2 = 4$$

$$\text{Следовательно, } t^2 - 7t + 12 = (t-3)(t-4).$$

$$\frac{t^2(t+7)(t-2)}{(t-3)(t-4)} \geq 0$$

$$\frac{t^2(t+7)(t-2)}{(t-3)(t-4)} > 0 \quad \text{или} \quad \frac{t^2(t+7)(t-2)}{(t-3)(t-4)} = 0.$$

$$\text{Рассмотрим функцию } f(t) = \frac{t^2(t+7)(t-2)}{(t-3)(t-4)}.$$



$$t \leq -7 \quad \text{или} \quad t = 0 \quad \text{или} \quad 2 \leq t < 3 \quad \text{или} \quad t > 4.$$

Вернёмся к исходной переменной.

$$6^x \leq -7 \quad \text{или} \quad 6^x = 0 \quad \text{или} \quad 2 \leq 6^x < 3 \quad \text{или} \quad 6^x > 4.$$

нет

нет

$$6^{\log_6 2} \leq 6^x < 6^{\log_6 3}$$

$$6^x > 6^{\log_6 4}$$

решений

решений

$$\log_6 2 \leq x < \log_6 3$$

$$x > \log_6 4$$

$$\text{Ответ: } [\log_6 2; \log_6 3) \cup (\log_6 4; +\infty).$$



Интенсив «Решение заданий повышенного и высокого уровня сложности»

Занятие 3 «Решение неравенств»

Обратим внимание на следующий момент: функция, которую рассматривали в задании $f(t) = \frac{t^2(t+7)(t-2)}{(t-3)(t-4)}$ такова, что при переходе аргумента через

точки -7 ; 2 ; 3 ; 4 функция меняла знак, а при переходе аргумента через точку 0 – нет, не меняла, причём 0 – одно из решений исходного неравенства. Точка не оказалась концом ни одного из искомых промежутков знакопостоянства (искали промежутки, в которых функция принимает положительные значения). Это изолированное решение.

Чтобы **не потерять изолированные решения**, можно применить один из двух надёжных способов решения.

Первый способ. Если очевидно, что промежутки знакопостоянства функции не будут чередоваться, то неравенство можно превратить в совокупность строгого неравенства и уравнения, решить неравенство, решить уравнение, ответы объединить.

Второй способ. Решение нестрого неравенства методом интервалов завершить двумя исследованиями: штриховкой выделить промежутки, в которых выполняется строгое неравенство, а затем повторно выделить точки, в которых функция принимает значение 0 , и объединить ответы (так и было сделано в предложенном решении). Этот способ применим при решении *любого* нестрогого неравенства.



Проанализируем самую массовую ошибку за последние 5 лет, допущенную при решении неравенства.

Выполняя преобразования, участники экзамена верно приводили исходное неравенство к виду, например: $\frac{1}{x-5} < \frac{1}{2}$ или $\frac{2}{3x+4} \geq \frac{1}{5}$, и, решая полученное неравенство, многие из них допускали грубую ошибку.

1) $\frac{1}{x-5} < \frac{1}{2}$.

Это дробно-рациональное неравенство. Свойство дробей с одинаковыми числителями, которое учили в 5 классе: «из двух дробей с одинаковыми числителями та дробь меньше, у которой знаменатель больше» относится к дробям, принимающим исключительно положительные значения (в пятом классе ученики даже не представляли, что помимо положительных чисел и 0 есть ещё и отрицательные числа). **Во множестве действительных чисел сформулированное выше правило не работает** (это неверное утверждение, если речь идёт о дробях, принимающих любые действительные значения).

Поэтому единственно правильный подход к решению – это шаг 1: перенести все слагаемые в одну часть неравенства (в другой части неравенства появляется 0): $\frac{1}{x-5} - \frac{1}{2} < 0$,

шаг 2: привести дроби к общему знаменателю: $\frac{2-x+5}{2(x-5)} < 0$; $\frac{7-x}{2(x-5)} < 0$,

шаг 3: продолжить решение либо методом интервалов, либо методом систем. Выбираю метод систем: «дробь меньше 0, если числитель и знаменатель принимают значения разных знаков: +, – или –, +».

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} 7-x > 0, \\ 2(x-5) < 0 \end{array} \right. & \text{или} & \left\{ \begin{array}{l} 7-x < 0, \\ 2(x-5) > 0; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x < 7, \\ x-5 < 0 \end{array} \right. & & \left\{ \begin{array}{l} x > 7, \\ x-5 > 0; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x < 7, \\ x < 5 \end{array} \right. & & \left\{ \begin{array}{l} x > 7, \\ x > 5; \end{array} \right. \\ x < 5 & & x > 7. \end{array}$$

Ответ: $(-\infty; 5) \cup (7; +\infty)$.

$$2) \frac{2}{3x+4} \geq \frac{1}{5}.$$

Другая массовая ошибка – для решения неравенства применяли свойство пропорции. Такого способа решения неравенств **нет и быть не может**. В чём причина: фактически обе части неравенства при таком преобразовании умножаются на произведение $5 \cdot (3x+4)$, но, если это произведение принимает положительные значения, то знак неравенства нужно сохранить, а, если отрицательные – изменить на противоположный (знаменатель не равен 0).

Неопределённость по отношению к знаку неравенства и запрещает подобный подход в решении (если кто-то рассмотрит подобную ситуацию как совокупность двух систем, то это не будет ошибкой при верных расчётах).

Решаем неравенство по сформулированному выше алгоритму:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3x+4} \geq \frac{1}{5} &\Leftrightarrow \frac{2}{3x+4} - \frac{1}{5} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{10-3x-4}{5(3x+4)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{6-3x}{5(3x+4)} \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 6-3x \geq 0, \\ 5(3x+4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \leq 6, \\ 3x+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \leq 6, \\ 3x > -4 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < 3x \leq 6 \Leftrightarrow -\frac{4}{3} < x \leq 2. \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 6-3x \leq 0, \\ 5(3x+4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq 6, \\ 3x+4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq 6, \\ 3x < -4 \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $\left(-\frac{4}{3}; 2\right]$.

PS Обратим внимание на то, что, даже **при решении уравнения по свойству пропорции СВОЙСТВО НЕОБХОДИМО ДОПОЛНИТЬ ОГРАНИЧЕНИЯМИ** «знаменатели дробей не равны 0», которое в дальнейшем можно упростить. Пример:

$$\frac{2}{x^2-4} = \frac{1}{x^2-3x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-6x+4 = x^2-4, \\ x^2-4 \neq 0, \\ x^2-3x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x+8 = 0, \\ x^2-4 \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \\ x^2-4 \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Ответ: 4

Как итог занятия, систематизируем основные методы решения неравенств.



ОСНОВНОЙ ПРИНЦИП РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ

Правильно, если **НА ВСЕХ** (даже промежуточных) шагах решения преобразования удовлетворяют схеме и при этом не сужают область допустимых значений



Неправильно, если даже всего на одном шаге (возможно, с последующими коррективами) преобразование удовлетворяет схеме





ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ

- 1. Метод равносильных преобразований**
- 2. Метод интервалов**
- 3. Метод введения новой переменной (новых переменных)**
- 4. Применение свойств функций**
- 5. Метод рационализации**

1. Метод равносильных преобразований применили сегодня при решении всех неравенств. Исключительно этим методом решены неравенства 2 (второй способ), дробно-рациональные неравенства (анализ массовых ошибок). В остальных решениях метод интегрировался с методом интервалов.
2. Особенность применения метода интервалов: нужно **УКАЗАТЬ ФУНКЦИЮ** и осознать её область определения. Дальнейшую работу необходимо построить **НА ЧИСЛОВОЙ ПРЯМОЙ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНО В ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ**, тщательно выбирая символ изображения изолированных точек, в которых функция не определена, и нулей функции. В каждом интервале нужно определить знак функции (подробное описание причинно-следственных связей в 11 классе не требуется). Решение нестрого неравенства можно завершить двумя исследованиями: штриховкой выделить промежутки, в которых выполняется строгое неравенство, а затем повторно выделить точки, в которых функция принимает значение 0, и объединить ответы.

Рассмотрим применение метода интервалов в области, имеющей ограничение. Источник задания: Мерзляк А.Г. «Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Углублённый уровень» (учебник из ФПУ). § 27, пример 3.

Решите неравенство $\sqrt[3]{2-x} > 1 - \sqrt{x-1}$.

Решение. $\sqrt[3]{2-x} > 1 - \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} - 1 > 0$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} - 1$. Она определена на промежутке $[1; +\infty)$ и непрерывна в области определения. Найдём нули функции.

$f(x) = 0$, если $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1$.

Пусть $\sqrt[3]{2-x} = a$, $\sqrt{x-1} = b$. Заметим, что тогда $a^3 + b^2 = 2 - x + x - 1 = 1$. Имеем:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a+b=1, \\ a^3+b^2=1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a, \\ a^3+b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a, \\ a^3+(1-a)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a, \\ a^3+1-2a+a^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a, \\ a^3+a^2-2a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a, \\ a(a^2+a-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a, \\ \begin{bmatrix} a=0 \\ a=1 \\ a=-2 \end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} a=-2, \\ b=3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a=0, \\ b=1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a=1, \\ b=0. \end{bmatrix} \end{cases} \end{aligned}$$

Вернёмся к исходной переменной.

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[3]{2-x} = -2, \\ \sqrt{x-1} = 3 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[3]{2-x} = 0, \\ \sqrt{x-1} = 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[3]{2-x} = 1, \\ \sqrt{x-1} = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} 2-x = -8, \\ x-1 = 9 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 2-x = 0, \\ x-1 = 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 2-x = 1, \\ x-1 = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 10 \\ x = 2 \\ x = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 10 \end{array} \right.$$

$$f(x) = \sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} - 1, \quad x \geq 1.$$



$f(x) > 0$ при $x \in (1; 2) \cup (10; +\infty)$.

Ответ: $(1; 2) \cup (10; +\infty)$.

3. Метод введения новой переменной применили при решении неравенства 3.

4. Свойство непрерывности функции используем в методе интервалов. Свойство монотонности функции применяем при решении, например, показательных и логарифмических неравенств. Рассмотрим применение свойства ограниченности функции при решении неравенства $\log_2(\sqrt{x-2} + 4) \log_3(x^2 + x + 21) \geq 6$.

Источник задания: Мерзляк А.Г. «Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Углублённый уровень» (учебник из ФПУ). § 27, пример 5.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \log_2(\sqrt{x-2} + 4) \log_3(x^2 + x + 21)$.

Область определения: $D(f) = [2; +\infty)$. Тогда

1) $x \geq 2$	2) $y = x^2 + x + 21$ – квадратичная функция.
$x - 2 \geq 0$	График – парабола, ветви направлены вверх.
$\sqrt{x-2} \geq 0$	$x_0 = \frac{-1}{2}$ – абсцисса вершины параболы. $\frac{-1}{2} < 2$.
$\sqrt{x-2} + 4 \geq 4$	Следовательно, при $x \geq 2$ $y \geq y(2) = 4 + 2 + 21 = 27$,
$\log_2(\sqrt{x-2} + 4) \geq \log_2 4$	$\log_3(x^2 + x + 21) \geq \log_3 27$
$\log_2(\sqrt{x-2} + 4) \geq 2$	$\log_3(x^2 + x + 21) \geq 3$

Первый множитель не меньше 2, второй – не меньше 3, тогда их произведение не меньше 6. Функция $f(x) = \log_2(\sqrt{x-2} + 4) \log_3(x^2 + x + 21)$ ограничена снизу, её значения не меньше 6, следовательно, неравенство $\log_2(\sqrt{x-2} + 4) \log_3(x^2 + x + 21) \geq 6$ выполняется при любом допустимом x .

Ответ: $[2; +\infty)$

5. Метод рационализации применили при решении неравенств 1 и 2.



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

ПАНИНА Н. А.

11.12.2025 состоится занятие «Экономические задачи: вклады, кредиты»

Презентации интенсива размещены на сайте:

http://www.dpo-smolensk.ru/rumo_new/l-pred-emc/2-matematika/intensiv.php