



Интенсив
2024-2025 учебный год

Задачи на числа

Панина Нина Александровна,
учитель МБОУ «СШ № 33», г. Смоленска

ЗАДАНИЕ 19

Фактически – это 3 задания (а, б и в). Например,

19. У трёхзначного числа $n = 100a + 10b + c$ все цифры отличны от нуля. Обозначим через S сумму цифр и через m произведение цифр.

а) Может ли быть, что $S = 10m$?

б) Сколько существует чисел, у которых $m < S$?

в) Какие целые значения имеет дробь $k = \frac{m}{S}$, если среди цифр числа есть 1?

Источник условия задачи: <https://alexlarin.net/ege/2025/trvar498.html>

Критерии оценивания задания 19

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а, б и в	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в и обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а и б ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

- Если предстоит ответить: «Да, могло», то можно без обоснований привести пример (шаг 1) и доказать его полное соответствие условию задачи (шаг 2).

- Если предстоит ответить: «Нет, не могло», то решение можно выполнить двумя способами.

Первый: можно

- ✓ ввести буквенную символику и составить буквенную модель объекта,
- ✓ в общем виде выполнить с объектом все манипуляции, указанные в условии задачи,
- ✓ обнаружить противоречие условию.

Второй: можно

- выяснить, каким свойством обладают изучаемые объекты,
- смоделировать множество ВСЕХ объектов, обладающих этим свойством,
- методом перебора показать, что КАЖДЫЙ ИЗ НИХ противоречит условию.



19. У трёхзначного числа $n = 100a + 10b + c$ все цифры отличны от нуля. Обозначим через S сумму цифр и через m произведение цифр.

а) Может ли быть, что $S = 10m$?

б) Сколько существует чисел, у которых $m < S$?

в) Какие целые значения имеет дробь $k = \frac{m}{S}$, если среди цифр числа есть 1?

Источник условия задачи: <https://alexlarin.net/ege/2025/trvar498.html>

Решение. а) Имеем число $n = 100a + 10b + c$, тогда $S = a + b + c$, $m = abc$.

Наибольшее значение S равно 27,	$\Rightarrow m = 1$ или $m = 2$.
m – целое число, неравное 0	
$S = 10m$	

1) Если $m = 1$, то $a = b = c = 1$. Тогда $S = 3$, но $3 \neq 10 \cdot 1$.

Следовательно, $m \neq 1$.

2) Если $m = 2$, то две цифры исходного числа равны 1, а одна цифра – это 2. Тогда $S = 4$, но $4 \neq 10 \cdot 2$. Следовательно, $m \neq 2$.

Нет, не может быть, что $S = 10m$.

Ответ: нет, не может быть.

Логика решения:

- выяснили, каким свойством обладает S (верхняя граница равна 27),
- смоделировали множество ВСЕХ значений m , обладающих свойством $S = 10m$,
- методом перебора показали, что КАЖДЫЙ ИЗ НИХ противоречит условию.

Заключение: НЕТ, не может.

б) Сколько существует чисел, у которых $m < S$?

Решение

Учтём, что наибольшее значение S равно 27. Тогда значение m не может оказаться больше 26.

1) Найдём значения m , для которых верно неравенство $m < S$, то есть верно, что $abc < a + b + c$. При этом учтём, что множителями являются цифры, следовательно, значением m не может оказаться простое двузначное число. Применим метод перебора.

Значение m	Цифры числа	Значение S	Верно ли, что $m < S$		Значение m	Цифры числа	Значение S	Верно ли, что $m < S$
1	1; 1; 1	3	верно		14	1; 2; 7	10	неверно
2	1; 1; 2	4	верно		15	1; 3; 5	9	неверно
3	1; 1; 3	5	верно		16	1; 2; 8	11	неверно
4	1; 1; 4	6	верно			1; 4; 4	9	неверно
	1; 2; 2	5	верно		18	1; 2; 9	12	неверно
5	1; 1; 5	7	верно			1; 3; 6	10	неверно
6	1; 1; 6	8	верно		20	1; 4; 5	10	неверно
	1; 2; 3	6	неверно			2; 2; 5	9	неверно
7	1; 1; 7	9	верно		21	1; 3; 7	11	неверно
8	1; 1; 8	10	верно		22	Не может быть	-	-
	1; 2; 4	7	неверно			1; 3; 8	12	неверно
9	1; 1; 9	11	верно		24	1; 4; 6	11	неверно
	1; 3; 3	7	неверно			2; 2; 6	10	неверно
10	1; 2; 5	8	неверно			2; 3; 4	9	неверно
12	1; 2; 6	9	неверно		26	Не может быть	-	-
	1; 3; 4	8	неверно					

2) Для каждого допустимого набора цифр установим количество чисел с таким набором цифр.

Значение m	Цифры числа	Количество трёхзначных чисел с таким набором цифр
1	1; 1; 1	1
2	1; 1; 2	3
3	1; 1; 3	3
4	1; 1; 4	3
	1; 2; 2	3
5	1; 1; 5	3
6	1; 1; 6	3
7	1; 1; 7	3
8	1; 1; 8	3
9	1; 1; 9	3
ИТОГО		28

Ответ: 28 чисел



19. Трёхзначное число, все цифры которого ненулевые, разделили на произведение его цифр.

- а) Могло ли в результате деления получиться частное, равное 8?
- б) Могло ли в результате деления получиться частное, равное 222?
- в) Какое наибольшее частное можно было получить в результате деления?

Источник условия задачи: <https://math100.ru/variant-ege-prof-248/>

Решение. а) Да, в результате могло получиться 8. Например, $\frac{128}{1 \cdot 2 \cdot 8} = \frac{64}{8} = 8$.

PS Если предстоит ответить: «Да, могло», то можно без обоснований привести пример и доказать его полное соответствие условию задачи

б) Пусть трёхзначное число равно X ,

a – его первая цифра, $a \neq 0$,

b – его вторая цифра, $b \neq 0$,

c – его третья цифра, $c \neq 0$.

Тогда $\frac{X}{a \cdot b \cdot c} = 222$;

$X = 222a \cdot b \cdot c \mid \Rightarrow X$ без остатка делится на 222.

Трёхзначные числа, делящиеся на 222 без остатка – это 222; 444; 666; 888.
Других нет.

$$\frac{222}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{111}{4} \text{ — не является натуральным числом,}$$

$$\frac{444}{4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{111}{16} \text{ — не является натуральным числом,}$$

$$\frac{666}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{111}{36} = \frac{37}{12} \text{ — не является натуральным числом,}$$

$$\frac{888}{8 \cdot 8 \cdot 8} = \frac{111}{64} \text{ — не является натуральным числом.}$$

Следовательно, нет, не могло частное равняться 222.

Логика решения:

- выяснили, каким свойством обладают изучаемые объекты (в представленном примере – делятся на 222),
- смоделировали множество ВСЕХ объектов, обладающих этим свойством (в представленном примере – {222; 444; 666; 888}) и
- методом перебора показали, что КАЖДЫЙ ИЗ НИХ противоречит условию.

Заключение: нет, не могло.

в) Пусть трёхзначное число равно X , в нём нет нулевых цифр,

a – его первая цифра, $a \neq 0$, $a \in \{1; 2; 3; \dots; 9\}$

b – его вторая цифра, $b \neq 0$, $b \in \{1; 2; 3; \dots; 9\}$

c – его третья цифра, $c \neq 0$, $c \in \{1; 2; 3; \dots; 9\}$

$$\frac{X}{a \cdot b \cdot c} = \frac{100a + 10b + c}{a \cdot b \cdot c} = \frac{100}{b \cdot c} + \frac{10}{a \cdot c} + \frac{1}{a \cdot b}$$

$$\left. \begin{array}{l} \left(\frac{100}{b \cdot c} \right)_{\text{наибольшее}} = 100 \\ \left(\frac{10}{a \cdot c} \right)_{\text{наибольшее}} = 10 \\ \left(\frac{1}{a \cdot b} \right)_{\text{наибольшее}} = 1 \end{array} \right| \Rightarrow \frac{100}{b \cdot c} + \frac{10}{a \cdot c} + \frac{1}{a \cdot b} \leq 111$$

Каждая из дробей принимает наибольшее значение только тогда, когда знаменатель обращается в 1.

Тогда $b = c = a = 1$, $X = \overline{abc} = 111$. Действительно, $\frac{111}{1 \cdot 1 \cdot 1} = 111$.

Следовательно, наибольшее частное, которое можно получить в результате деления равно 111.

Ответ: а) да, могло (см. пример),

б) нет, не могло,

в) 111.



19. В порту имеются только заполненные контейнеры, масса каждого из которых равна 20 тонн или 40 тонн. В некоторых из этих контейнеров находится сахарный песок. Количество контейнеров с сахарным песком составляет 60% от общего количества контейнеров.

а) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 50% от общей массы всех контейнеров?

б) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 40% от общей массы контейнеров?

в) Какую наибольшую долю (в процентах) может составить масса контейнеров с сахарным песком от общей массы всех контейнеров?

Источник условия задачи: <https://alexlarin.net/ege/2025/trvar469.html>

Решение.

а) Пусть было a контейнеров по 20 тонн и b контейнеров по 40 тонн. Тогда $(a + b)$ контейнеров всего,
 $(20a + 40b)$ тонн – общая масса груза в контейнерах.

Контейнеры с песком:

$0,6(a + b)$ контейнеров с песком всего, из них

m контейнеров по 20 тонн,

$(0,6a + 0,6b - m)$ контейнеров по 40 тонн,

$(20m + 40(0,6a + 0,6b - m))$ тонн – масса контейнеров с песком. Она составляет 50% от общей массы груза.

$$20m + 40(0,6a + 0,6b - m) = 0,5(20a + 40b).$$

$$20m + 40(0,6a + 0,6b - m) = 0,5(20a + 40b);$$

$$20m + 24a + 24b - 40m = 10a + 20b;$$

$$14a + 4b = 20m;$$

$$7a + 2b = 10m.$$

Равенство верно, если $a = 4$, $b = 1$, $m = 3$.

Действительно,

- всего 5 контейнеров, из них 3 с песком (это 60% от общего числа контейнеров),
- общая масса груза $4 \cdot 20 + 1 \cdot 40 = 120$ тонн,
- масса груза с песком $3 \cdot 20 = 60$ тонн (50% от общей массы груза).

Да, может масса контейнеров с сахарным песком составить 50% от общей массы всех контейнеров.

Второй способ решения задачи а).

1) Пусть всего было 5 контейнеров, из них 3 с песком. Тогда контейнеры с песком составляют $\frac{3}{5} \cdot 100\% = 60\%$ от общего количества контейнеров.

2) Пусть 3 контейнера с песком были по 20 тонн, а из двух контейнеров без песка один был 40-тонный и один 20-тонный. Тогда общая масса груза составила 120 тонн:

$$20 \cdot 3 + (40 \cdot 1 + 20 \cdot 1)$$

$$\text{Масса контейнеров с песком } 20 \cdot 3 = 60 \text{ тонн.} \quad \frac{60}{120} \cdot 100\% = \frac{1}{2} \cdot 100\% = 50\%$$

Ответ: да, масса контейнеров с песком может составлять 50%.

б) Найдём, какую наименьшую долю (в процентах) может составлять масса контейнеров с песком от общей массы груза.

Доля окажется наименьшей, если все контейнеры с песком окажутся наименьшей наполняемостью (по 20 тонн), а все контейнеры без песка окажутся наибольшей наполняемостью (по 40 тонн).

Пусть всего было n контейнеров. Тогда

$0,6n$ контейнеров с песком и $0,4n$ контейнеров без песка,

$20 \cdot 0,6n = 12n$ тонн – масса контейнеров с песком,

$40 \cdot 0,4n = 16n$ тонн – масса контейнеров без песка,

$12n + 16n = 28n$ тонн – общая масса груза.

$\frac{12n}{28n} \cdot 100\% = \frac{3}{7} \cdot 100\% = \frac{300}{7}\% = 42\frac{6}{7}\%$ – наименьшая доля, которую может составлять

масса контейнеров с песком от общей массы контейнеров, если их было 60% от всех контейнеров.

$40\% < 42\frac{6}{7}\%$. Следовательно, нет, не может масса контейнеров с сахарным песком

составить 40% от общей массы контейнеров.

Логика решения:

- ✓ ввели буквенную символику и составили буквенную модель объекта,
- ✓ проанализировали модель и обнаружили противоречие условию.

Заключение: нет, не могло

в) Какую наибольшую долю (в процентах) может составить масса контейнеров с сахарным песком от общей массы всех контейнеров?

Для того, чтобы доля массы контейнеров с песком оказалась наибольшей, нужно, чтобы масса контейнеров с песком оказалась наибольшей, а масса контейнеров без песка – наименьшей. Следовательно, все контейнеры с песком должны быть по 40 тонн, а все контейнеры без песка – по 20 тонн.

По условию задачи количество контейнеров с песком составляет 60% от общего количества контейнеров.

Пусть x контейнеров всего, тогда $0,6x$ контейнеров с песком и $0,4x$ контейнеров без песка,

$40 \cdot 0,6x = 24x$ тонн – масса контейнеров с песком,

$20 \cdot 0,4x = 8x$ тонн – масса контейнеров без песка,

$24x + 8x = 32x$ тонн – общая масса груза

$\frac{24x}{32x} \cdot 100\% = \frac{3}{4} \cdot 100\% = 75\%$ – наибольшая доля, которую может составить масса

контейнеров с сахарным песком от общей массы всех контейнеров.

Ответ: 75%

Задание 19

- Если предстоит ответить: «Да, могло», то можно без обоснований привести пример (шаг 1) и доказать его полное соответствие условию задачи (шаг 2).
- Если предстоит ответить: «Нет, не могло», то решение можно выполнить двумя способами.
 - Первый: можно**
 - ✓ ввести буквенную символику и составить буквенную модель объекта,
 - ✓ в общем виде выполнить с объектом все манипуляции, указанные в условии задачи,
 - ✓ обнаружить противоречие условию.
 - Второй: можно**
 - выяснить, каким свойством обладают изучаемые объекты,
 - смоделировать множество ВСЕХ объектов, обладающих этим свойством,
 - методом перебора показать, что КАЖДЫЙ ИЗ НИХ противоречит условию.



ПОЛЕЗНЫЕ ПРИВЫЧКИ

1. Перед выполнением первого задания снять внутреннее напряжение (выполнить упражнения на расслабление)
2. Внутренне быть готовым к тому, что, как и на контрольной работе, может что-то сразу не получиться. Расстраиваться из-за этого не нужно. Нужно, не теряя драгоценные минуты, перейти к следующему заданию и постараться его выполнить.
3. Полученный в задании ответ обязательно сопоставить с текстом задачи: «Что требовалось найти? В каких единицах следует указать ответ?»
4. Полученный в задании ответ нужно проверить на достоверность: «Правдоподобен ли ответ? Не противоречит ли он условию задачи, жизненному опыту?»
5. **Торопиться, не спеша!**



ЗАПОЛНЕНИЕ БЛАНКА № 1

- Если все задания с кратким ответом выполнялись по порядку, без нарушений очерёдности, то не имеет значения, когда заполнять бланк ответов компьютерной проверки – сразу после выполнения задания и проверки ответа на правдоподобие или после решения всех задач первой части.
- Если какое-то задание было пропущено или задания выполнялись не в заданной последовательности, то бланк лучше заполнять сразу после выполнения задания и проверки ответа, чётко осознавая, в строку какого задания следует записать ответ

PS Если нужно будет изменить ответ, то используем поле замены ответов

ЖЕЛАЮ УСПЕХА!



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Панина Н.А.
n.a.panina@mail.ru